Министерство просвещения Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет» - УрГПУ
Институт математики, физики, информатики и технологий
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

«Лабораторные работы по математике как инструмент формирования функциональной математической грамотности»

Сообщение на семинаре проекта ФУМО «Новая Дидактика»
г. Ярославль: ЯрГПУ им. К.Д. Ушинского, 27 января 2022 г.

Бодряков Владимир Юрьевич, д.ф.-м.н.
зав. КВМиМОМ ИМФИиТ ФГБОУ ВО «УрГПУ»

E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru

Екатеринбург - 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1. Формирование и развитие функциональной математической грамотности (ФМГ) обучающихся – тренд современного массового математического образования .

§2. Лабораторные работы по математике (ЛРМ) – от античных идей до современных воплощений.

§3. Лабораторные работы по математике как инструмент формирования и развития функциональной математической грамотности будущих учителей (из опыта КВМиМОМ УрГПУ).

Заключение.

Литература и интернет - ресурсы

[1] Концепция развития математического образования в Российской Федерации: утв. Распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р.

[2] ФИОКО (Федеральный институт оценки качества образования) // URL: https://fioco.ru/Contents/Item/Display/2201978.

[3] PISA–2021. Mathematics Framework // URL: https://pisa2021-maths.oecd.org.

[4] PISA: математическая грамотность. – Минск: РИКЗ, 2020. – 252 с.

[5] Млодинов Л. Евклидово окно. История геометрии от параллельных прямых до гиперпространства. – Litres, 2017. – 310 с.

[6] Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов, М.А. Павлова, А.Е. Томилова, Л.В. Форкунова, Л.Н. Удовенко, Н.Н. Новоселова, Н.И. Фомина, М.В. Артемьева, Т.С. Ширикова, О.Л. Безумова, С.Н. Котова, В.В. Паршева, Н.Н.Патронова, М.В. Белорукова, В.В. Тепляков, Т.П. Рогушина, Е.А. Тархов, О.Н. Троицкая, Л.Н. Чиркова. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. – 300 с.

[7] Das K. Significant of mathematics laboratory activities for teaching and learning // International Journal on Integrated Education. 2019. V. 2. N. 5. P. 19-25.

Литература и интернет - ресурсы

[8] Сынбулатова (Аксенова) О.В., Бодряков В.Ю. Система разноуровневых лабораторных работ по математике с применением ИКТ как инструмент фронтального формирования учебно-исследовательских и творческих умений обучающихся. С. 460–462 / В сб. материалов XXVIII Международной конференции «Современные информационные техно-логии в образовании», Москва – Троицк: Фонд «БАЙТИК», 27 июня 2017 г. – 602 с.

[9] Кузовкова А.А., Мамалыга Р.Ф., Бодряков В.Ю. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся в классах гуманитарно-эстетической направленности // Математика в школе. 2018. № 2. С. 35–42.

[10] Аксенова О.В., Бодряков В.Ю., Быков А.А., Топорова Н.В. Оптимизационная задача о провисании цепной линии. С. 123–130 / В сб.: Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед. ун-т. – Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2018. – 314 с.

[13] Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Лабораторные работы по математике с применением информационных технологий / Материалы Международной научно-практической конференции «Современное состояние и пути развития информатизации образования в здоровьесберегающих условиях», 23 ноября 2017 г. Часть 2. // Ученые записки ИУО РАО. 2018. № 1 (65). С. 12–15.

[14] Алексеевский П. И., Аксенова О. В., Бодряков В. Ю. Робототехническая реализация модельной практико-ориентированной задачи об оптимальной беспилотной транспортировке грузов // Информатика и образование. 2018. №. 8. С. 51-60.

Литература и интернет - ресурсы

[15] Аксенова О.В., Бодряков В.Ю., Быков А.А., Топорова Н.В. Оптимизационная задача о провисании цепной линии. С. 123–130 / В сб.: Актуальные вопросы преподавания ма-тематики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник науч-ных работ / Урал. гос. пед. ун-т. – Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2018. – 314 с.

[16] Бодряков В.Ю., Быков А.А. История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения // Математическое образование. 2018. №. 4(88). С. 18-29.

[17] Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Натурный эксперимент с применением средств информационно-коммуникационных технологий и мобильных устройств как инструмент формирования исследовательских умений студентов // Вестник РУДН. Серия: Информатизация образования. 2018. Т. 15. № 4. С. 363–372.

[18] Бодряков В.Ю., Закирова Л.И. Лабораторные работы по математике как инструмент формирования компонентов когнитивного и деятельностного мышления будущих педагогов. С. 51–58 / Формирование мышления в процессе обучения естественнонаучным, технологическим и математическим дисциплинам: материалы всероссийской научно – практической конференции, 1–2 апреля 2019 г. Екатеринбург: УрГПУ, 2019. – 180 с..

Литература и интернет - ресурсы

[19] Бодряков В.Ю., Закирова Л.И. О возможностях формирования компонентов когнитивного и деятельностного мышления обучающихся при выполнении лабораторных работ по математике / В сборнике: От ранней профориентации к выбору профессии инженера – Формирование престижа профессии инженера у современных школьников. Сборник статей II (VII) Всероссийской очно-заочной научно-практической конференции с международным участием в рамках Петербургского международного образовательного форума Международной очно-заочной научно-практической конференции. В 2-х частях. Санкт-Петербург, 2019. С. 140-145.

[20] Бодряков В.Ю., Герасимова Т.А., Шихирина О.М. Натурная верификация виртуального вероятностного опыта на примере случайного бросания канцелярской кнопки // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. 2019. № 4. С. 178-189.

[21] Бодряков В.Ю., Быков А.А. Улучшаемые пиксельные оценки мер плоских множеств как методический подход к введению понятия «Площадь фигуры» в курсе геометрии. Часть 1 // Математическое образование. 2019. N. 4(92). С. 17-29.

[22] Бодряков В.Ю., Быков А.А. Улучшаемые пиксельные оценки мер плоских множеств как методический подход к введению понятия «Площадь фигуры» в курсе геометрии. Часть 2 // Математическое образование. 2020. N. 1(93). С. 15-23.

Литература и интернет - ресурсы

[23] Леконцева В.А., Придорогина К.Д., Бодряков В.Ю. Определение фундаментальной мировой константы – числа е (на примере лабораторной работы «Измерение числа е путем оцифровки изображения висящей цепи») / В сб.: Актуальные проблемы развития естественных наук. сборник статей участников XXII Областного конкурса научно-исследовательских работ «Научный Олимп» по направлению «Естественные науки». Департамент молодежной политики Свердловской области; ГАУ СО «Дом молодежи»; ФГАУ ВО Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. Екатеринбург, 2020. С. 128-133.

[24] Бодряков В.Ю. Опыт применения лабораторных работ по математике в качестве высокомотивирующего инструмента профессиональной подготовки будущих учителей (С. 211-216) / В сборнике: Стратегические ориентиры современного образования (Между-народный педагогический форум "Стратегические ориентиры современного образования", Екатеринбург, 05–06 ноября 2020 г.). Сборник научных статей. – Екатеринбург: УрГПУ, 2020. – 300 с.

[25] Придорогина К.Д., Леконцева В.А., Бодряков В.Ю. Определение фундаментальной ми-ровой константы – «числа е» путем оцифровки изображения висящей цепи (С. 32-38) / В сборнике: Исследование социально-экономических, образовательных и методических проблем в творческих проектах студентов и преподавателей современного педагогиче-ского вуза. Сборник научных трудов. – Екатеринбург: УрГПУ, 2020. – 192 с.

Литература и интернет - ресурсы

[26] Бодряков В.Ю., Аксенова О.В. Лабораторные работы по математике как инструмент формирования и контроля функциональной математической грамотности обучающихся / Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ / Уральский государственный педагогический университет; научный редактор Л.В. Сардак. – Электрон. дан. – Екатерин-бург: [б.и.], 2021. – 1 CD-ROM. – Текст: электронный.

[27] Бодряков В.Ю., Быков А.А. Перспективы применения цифровых лабораторных работ по математике для профессиональной подготовки будущих учителей / Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ / Уральский государственный педагогический университет; научный редактор Л.В. Сардак. – Электрон. дан. – Екатеринбург: [б.и.], 2021. – 1 CD-ROM. – Текст: электронный.

[28] Мальцев И.В., Бодряков В.Ю. Формирование функциональной математической грамотности у обучающихся сельской школы при выполнении лабораторной работы по определению геометрических характеристик участка земной поверхности / Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ / Уральский государственный педагогический университет; научный редактор Л.В. Сардак. – Электрон. дан. – Екатеринбург: [б.и.], 2021. – 1 CD-ROM. – Текст: электронный.

Литература и интернет - ресурсы

[29] Бодряков В.Ю., Быков А.А. Цифровые лабораторные работы по математике как современный инструмент формирования мышления математика-экспериментатора // Доклад на Всероссийской научно-практической конференции «Формирование мышления в процессе обучения естественнонаучным, технологическим и математическим дисциплинам», Екатеринбург: УрГПУ, 25-26 октября 2021 г.

[30] Закирова А.В., Ладэ Э.О., Леконцева В.А., Бодряков В.Ю. Лабораторные работы по математике как инструмент формирования экспериментального мышления обучающихся // Доклад на Всероссийской научно-практической конференции «Формирование мышления в процессе обучения естественнонаучным, технологическим и математическим дисциплинам», Екатеринбург: УрГПУ, 25-26 октября 2021 г.

В качестве эпиграфа

Настоящая наука начинается там,
где начинают измерять.
Д.И. Менделеев

В каждой естественной науке
заключено столько истины,
сколько в ней есть математики.
И. Кант

§1. О формировании предметной функциональной математической грамотности (ФМГ).

- **Леонтьев А.А**.: «Функционально грамотный человек — это человек, который способен использовать все постоянно приобретаемые в течение жизни знания, умения и навыки для решения максимально широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений» [Образовательная система «Школа 2100». Педагогика здравого смысла / под ред. А. А. Леонтьева. М.: Баласс, 2003. С. 35].
- Определение функциональной грамотности в исследовании PISA заложено в основном вопросе, на который отвечает исследование: «Обладают ли учащиеся 15-летнего возраста, получившие обязательное общее образование, знаниями и умениями, необходимыми им для полноценного функционирования в современном обществе, т.е. для решения широкого диапазона задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений?» [PISA 2018 Assessment and Analytical Framework. Paris: OECD Publishing, 2019, - 308 p.]

Составляющие функциональной грамотности

Функциональная грамотность – способность применять приобретаемые в течение жизни знания, умения и навыки для решения максимально широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности

ЯНДЕКС.УЧЕБНИК ДЛЯ НАЧАЛЬН

§1. О формировании предметной функциональной математической грамотности (ФМГ).

Функциональная математическая грамотность (ФМГ) является неотъемлемой составляющей общей функциональной грамотности человека.

Проблема повышения качества массового математического образования актуальна и многозадачна. Осознаем мы это или нет, математика является фундаментальной основой современного цифрового общества и является одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные (когнитивные) способности человека, влияя на преподавание других дисциплин [Концепция развития МО].

§1. … продолжение

- Проверке ФМГ грамотности 15-летних подростков в 2022 г. посвящено международное исследование PISA (Programme for International Student Assessment). Исследование PISA использует следующее определение:
- «*Математическая грамотность – это способность человека мыслить математически, формулировать, применять и интерпретировать математику для решения задач в разнообразных практических контекстах. Она включает в себя понятия, процедуры и факты, а также инструменты для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане в 21 веке*».
- В определении математической грамотности особое внимание уделяется использованию математики для решения практических задач в различных контекстах (личном, профессиональном, общественном, научном). Кроме этого, будет оцениваться креативность мышления.

§1. … продолжение

§1. … продолжение

- **Схема решения проблем реального мира, имеющих математическое выражение:**
- 1°. Построить математическую модель в контексте решаемой проблемы.
- 2°. Найти математическое решение проблемы в рамках построенной модели.
- 3°. Дать содержательную интерпретацию математическому решению в контексте проблемы реального мира.
- 4°. Оценить адекватность решения; при необходимости уточнить математическую модель; повторить цикл.

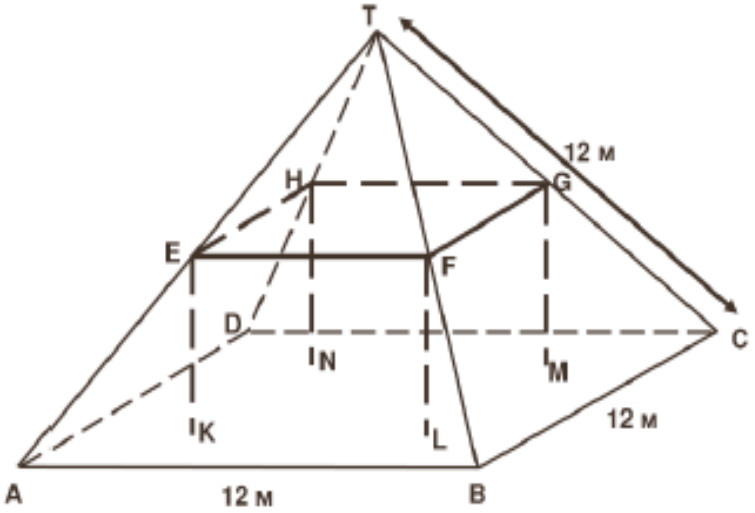
§1. … продолжение. Примеры задач PISA

- ФЕРМА
- Здесь вы видите фото фермерского дома с крышей в форме пирамиды (рис. 1).

- Рис. 1. Фото фермерского дома с крышей в форме пирамиды.

§1. … продолжение. Примеры задач PISA

- На рис. 2 изображена математическая модель крыши данного дома с добавленными единицами измерения. Чердак, обозначенный, как *ABCD* в модели, представляет собой квадрат. Поддерживающие крышу балки являются ребрами блока (прямоугольной призмы) *EFGHKLMN*. Точка *E* – середина балки *AT*, точка *F* – середина балки *BT*, точка *G* – середина балки *CT*, а точка *H* – середина балки *DT* соответственно. Все ребра пирамиды имеет длину 12 метров.



- Рис. 2. Математическая модель фермерского домика с крышей в форме пирамиды.

§1. … продолжение. Примеры задач PISA

- Вопрос 1. Вычислите площадь чердака *ABCD*.
- Цель вопроса:
- Область математического содержания: Изменение и зависимости.
- Контекст: Научный.
- Познавательная деятельность: Воспроизведение, определения, вычисления.
- Вопрос 2. Вычислите длину *EF*, одного из горизонтальных ребер блока.
- Цель вопроса:
- Область математического содержания: Пространство и форма.
- Контекст: Профессиональный.
- Познавательная деятельность: Установление связей и интеграция информации для решения задачи.
- Вопрос 3, 4 …

§1. … продолжение. Примеры задач PISA

- РОК-КОНЦЕРТ
- На рок-концерте для аудитории было выделено прямоугольное поле размером 100 м на 50 м. Все билеты на концерт были проданы, и поле было заполнено. Все зрители стояли.
- Вопрос 1. Какой из предложенных ответов соответствует наиболее правдоподобному количеству посетителей концерта?
- A. 2 000; B. 5 000; C. 20 000; D. 50 000; E. 100 000.
- Цель вопроса:
- Описание: Создание математической модели представленной ситуации.
- Область математического содержания: Количество.
- Контекст: Общественный.
- Познавательная деятельность: Формулировать.

§1. … продолжение. Примеры задач PISA

- НЕФТЯНОЕ ПЯТНО
- На рис. 4 изображено нефтяное пятно на поверхности моря.

- Рис. 4. Нефтяное пятно.

§1. … продолжение. Примеры задач PISA

- Вопрос 1. Используя масштаб карты, определите размер нефтяного пятна в квадратных километрах (км²).
- Цель вопроса:
- Описание: Определение площади неправильной фигуры с использованием приведенного масштаба.
- Область математического содержания: Пространство и форма.
- Контекст: Научный.
- Познавательная деятельность: Применять.

§1. Методы формирования ФМГ

- **Методы формирования функциональной математической грамотности (ФМГ) при изучении математики:**

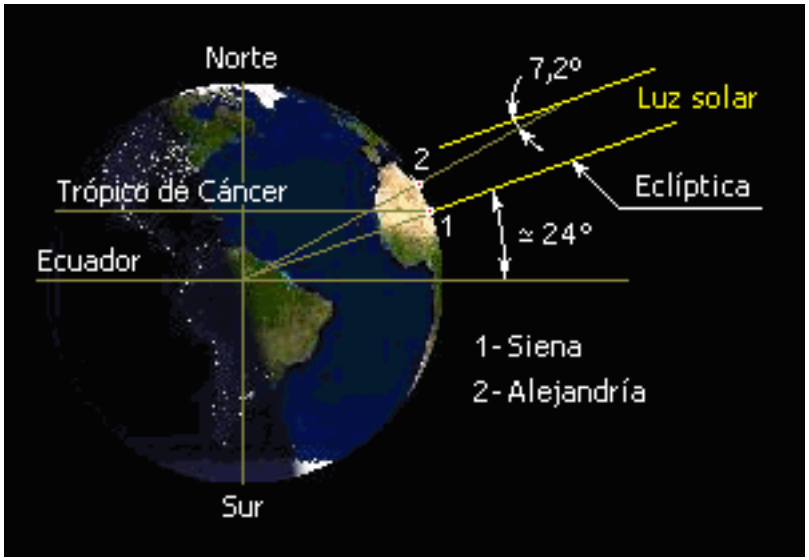
  - Историко-библиографический метод (изучение истории решения прикладных задач математиками прошлого; изучение современных методов решения прикладных задач);
  - Задачный метод (решение специально подобранных контекстных задач);
  - Проектный метод (выполнение учебно-исследовательских проектов, включающих решение практических задач);
  - Модельный метод (построение математических / компьютерных моделей реальных объектов, процессов, явлений; исследование моделей, прогнозирование);
  - **Экспериментально-лабораторный метод** (построение и экспериментально-лабораторное исследование математических моделей реальных объектов, процессов, явлений в форме ЛРМ).

§2. Лабораторные работы по математике (ЛРМ) – от античных идей до современных воплощений

- Меры длин и весов играли важную роль в жизни человека с самого начала человеческой цивилизации. Измерения важны для самых разных задач: строительства домов, торговли, выделения участков земли, шитья одежды. Первые путешественники, торговцы, мореплаватели, строители и астрономы нуждались в единицах измерения и приборах и изобретали их в зависимости от фантазии и возможностей.
- Древние системы мер были субъективными и, обычно, привязывались к размерам человеческого тела или к иным насколько возможно воспроизводимым объектам. Стадий, стадион, стадия – единица измерения расстояний в древних системах мер, введённая впервые в Вавилоне, а затем перешедшая к грекам и получившая своё греческое название. Не является достаточно определённой. В Вавилоне за стадий принимали расстояние, которое человек проходит спокойным шагом за промежуток времени от появления первого луча солнца при восходе его до того момента, когда весь солнечный диск окажется над горизонтом. Если этот выход солнца продолжается примерно две минуты, то за это время человек при средней скорости ходьбы проходит от 185 до 195 м.
- Самые ранние известные единые системы мер и весов были созданы между 4-м и 3-м тысячелетиями до нашей эры у древних народов Египта, Месопотамии и долины Инда, а также, возможно, и в Иране.

§2. … продолжение. Античные времена

- Но уже на самых ранних этапах своего развития математика оказалась способна не только давать решения практических задач повседневной действительности (финансы, налоги, торговля, строительство, военное дело и др.), на и помогать строить реалистичные модели мироздания.
- Так, в 240 г. до н.э. Эратосфен провёл эксперимент по измерению длины земного меридиана. Эта работа легла в череду трудов великих греческих математиков и астрономов Аристарха, Архимеда, Гиппарха.



§2. … продолжение. Античные времена

- Справка (Wikipedia): Ариста́рх Само́сский (др.-греч. Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος; ок. 310 до н. э., Самос – ок. 230 до н. э.) – древнегреческий астроном, математик и философ III века до н. э., впервые предложивший гелиоцентрическую систему мира и разработавший научный метод определения расстояний до Солнца и Луны и их размеров.

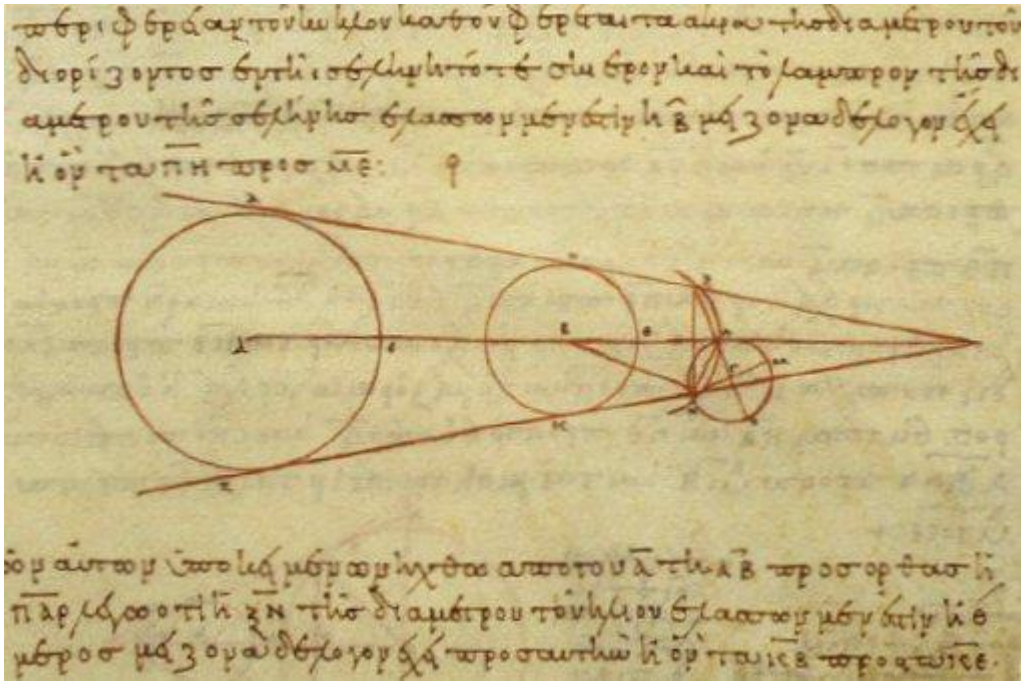
- Памятник Аристарху-Самосскому в Салониках

§2. … продолжение. Античные времена

- Из всех сочинений Аристарха Самосского до нас дошло только одно, «О величинах и расстояниях Солнца и Луны», где он впервые в истории науки пытается установить расстояния до этих небесных тел и их размеры.
- В 270 г. до н. э. Аристарх Самосский вычислил расстояние до Луны по продолжительности лунного затмения. Его логика была такой: максимальная длительность лунного затмения (при прохождении Луны через центр земной тени) составляет $t = 3{,}5$ часа, за это время Луна проходит земную тень, диаметр которой равен диаметру Земли ($2R_З$, где $R_З$ – радиус Земли), а один оборот Луна делает вокруг Земли за 27,3 суток (T) по периметру орбиты $2\pi R_{З\text{-}Л}$, где $R_{З\text{-}Л}$ – расстояние от Земли до Луны. Аристарх принимал скорость движения Луны по своей орбите постоянной (одинаковой во всех её точках).
- Таким образом он получил уравнение $2R_З/t = 2\pi R_{З\text{-}Л}/T$ откуда $R_{З\text{-}Л}/R_З = T/\pi t = 27{,}3/(3{,}14\cdot 0{,}146) = 59{,}6$. Это число очень близко согласуется с современными знаниями.

§2. … продолжение. Античные времена

- В расчётах Аристарха использовалось упрощение, что тень Земли не конус, а цилиндр, как будто бы Солнце является точечным источником света, в реальности диаметр земной тени на орбите Луны на 25% меньше размера нашей планеты (см. рис.).

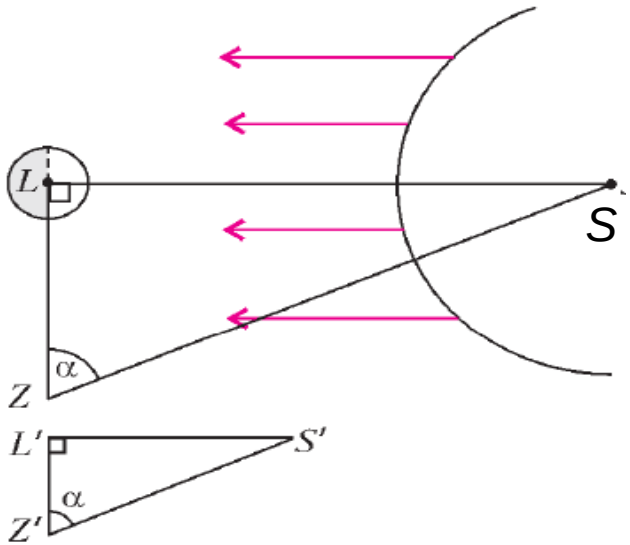


- Схема, поясняющая определение радиуса орбиты Луны по методу Аристарха (византийская копия X века).

§2. … продолжение. Античные времена

- Для определения расстояния до Солнца Аристарх предположил, что Луна имеет форму шара и заимствует свет от Солнца. Следовательно, если Луна находится в квадратуре, то есть выглядит рассечённой пополам, то угол Земля – Луна – Солнце является прямым. Теперь достаточно измерить угол между Луной и Солнцем α и, «решая» прямоугольный треугольник, установить отношение расстояний от Земли до Луны (см. рис.).
- Как одновременно застать Солнце и Луну на небосводе? Это можно сделать ранним утром, когда в ясную погоду видны оба небесных тела.

§2. … продолжение. Античные времена



- Схема Аристарха измерения отношения расстояний RЗ-Л и RЗ–С. *L* – Луна; *S* – Солнце; *Z* – наблюдатель на Земле.

- В ΔZLS угол при вершине L – прямой (см. рис.). Если теперь измерить угол $\alpha = \angle LZS$, то $\cos\alpha = ZL/ZS \approx$ RЗ-Л/RЗ–С. Можно считать для простоты, что наблюдатель находится в центре Земли. Это мало повлияет на результат, поскольку расстояние от Земли до Луны и до Солнца значительно превосходит радиус Земли.

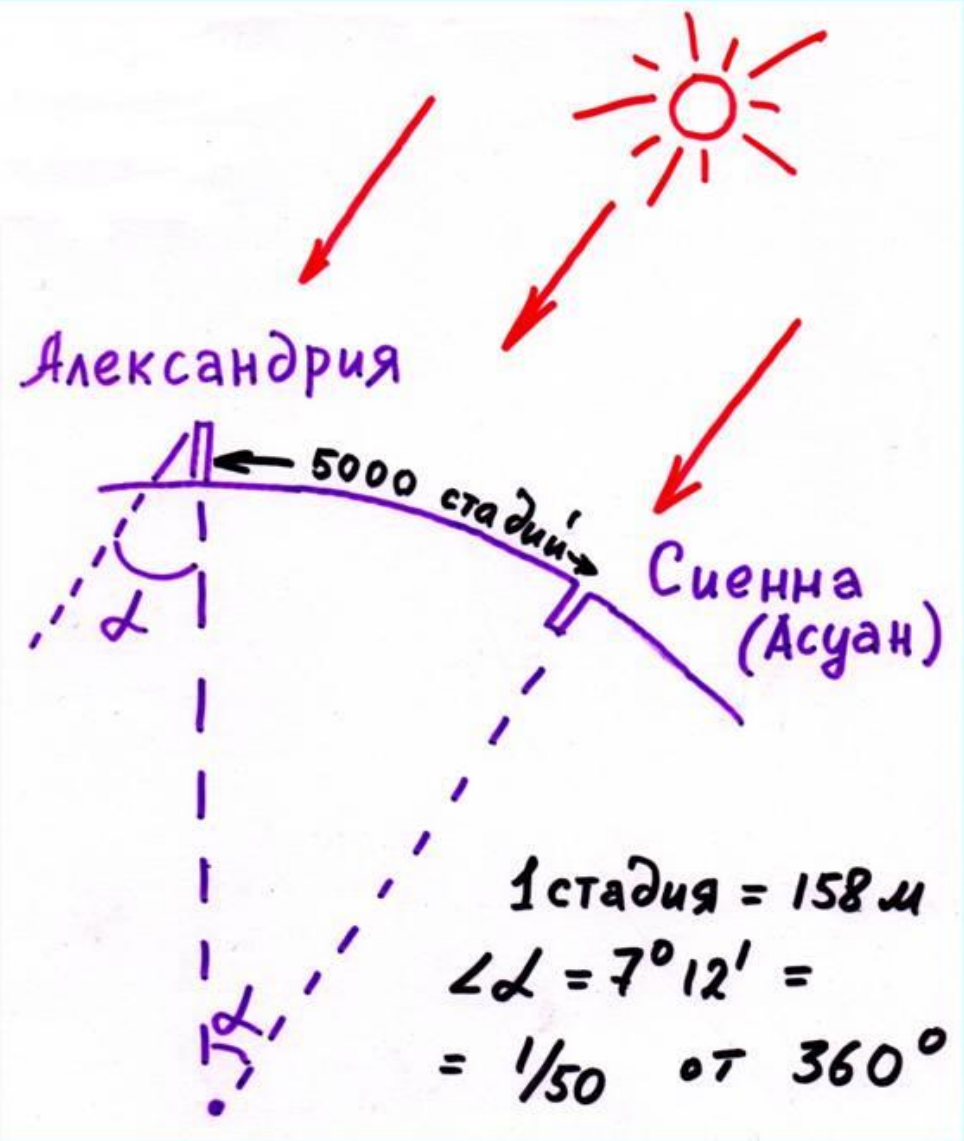
§2. … продолжение. Античные времена

- Измерив угол $\alpha \approx 87^\circ$ во время квадратуры, Аристарх вычисляет отношение расстояний от Земли до Луны и до Солнца. Хотя греческая тригонометрическая теория будет развита позднее (в работах Архимеда и др.), Аристарх знал, что такое подобные треугольники, и этого было достаточно. Начертив маленький прямоугольный треугольник $\Delta Z'L'S'$ с тем же углом $\alpha = \angle L'Z'S'$, и измерив его стороны, получаем искомое отношение расстояний $R_{З\text{-}Л}/R_{З\text{–}С} \approx 1/19$.
- Расстояние до Солнца Аристарх недооценил примерно в 20 раз. Причина ошибки в том, что момент лунной квадратуры может быть установлен с большой неопределённостью, которая ведёт к погрешности в угле α и, следовательно, к ошибке в расстоянии до Солнца. Таким образом, метод Аристарха был несовершенным, неустойчивым к ошибкам. Но это был единственный метод, доступный в древности.
- Современная реконструкция метода Аристарха даёт отношение $R_{З\text{-}Л}/R_{З\text{–}С} \approx 1/400$. Получается, что Солнце в 400 раз дальше от Земли, чем Луна.

§2. … продолжение

- Справка (Wikipedia): Эратосфе́н Кире́нский (др.-греч. Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναῖος; 276 год до н. э. – 194 год до н. э.) – греческий математик, астроном, географ, филолог и поэт. Ученик Каллимаха, с 235 г. до н. э. – глава Александрийской библиотеки. Первый известный учёный, вычисливший размеры Земли.

§2. … продолжение



В 240 г.до н.э. Эратосфен провёл эксперимент по измерению длины меридиана. В день летнего солнцестояния19 июня в полдень с помощью скафиса был измерен < α и рассчитан радиус Земли.

Lокр. = 50 х 5000 стадий х 158 м = 39 500 км (Lмер.= 40 008,548 км)

R Земли по Эратосфену = 6 290 км (R = 6371 км).

Ошибка ~ 1,3 % !!!

§2. … продолжение

Скафис — древний прибор для определения высоты солнца над горизонтом (в разрезе)

§2. … продолжение

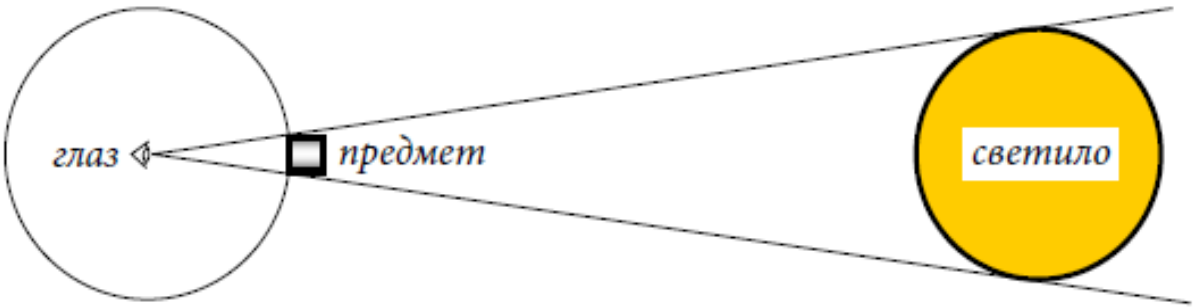
- Справка (Wikipedia): Архиме́д (др.-греч. Ἀρχιμήδης; 287–212 годы до н. э.) – древнегреческий учёный и инженер. Родился и большую часть жизни прожил в г. Сиракузы на Сицилии.

§2. … продолжение

- Архимед сделал множество открытий в области геометрии, теории чисел, предвосхитил многие идеи математического анализа. Заложил основы механики, гидростатики, был автором ряда важных изобретений. С именем Архимеда связаны многие математические понятия. Наиболее известно приближение числа π (22/7), которое называется Архимедовым числом. Согласно современным оценкам, открытия Архимеда стали основой для дальнейшего развития математики в 1550–1650-х гг. В частности, работы Архимеда легли в основание математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисления)
- В трудах Архимеда математика превратилась в инструмент не только научного познания, но и разумного преобразования окружающей действительности.
- Именно Архимед осознал важность не только получения численного выражения измеряемой величины, но и оценки степени достоверности результата, т.е. оценки погрешности.

§2. … продолжение

- В частности, Архимед первым не только измерил видимый угловой диаметр Солнца, но и дал оценку точности своих измерений.

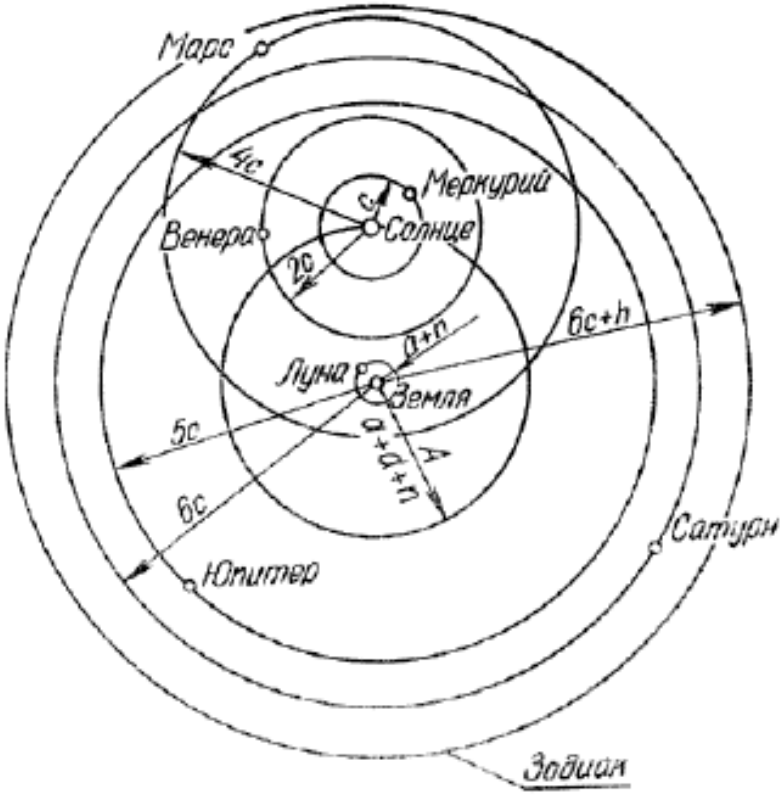


- Измерить угловые размеры Солнца и Луны принципиально несложно (Архимед, *Псаммит*). Для этого нужно заслонить светило некоторым предметом так, чтобы видимый поперечник этого предмета совпал с видимым размером светила (рис). Делать это лучше всего на восходе или закате: и закрывающий предмет удобнее держать на одной горизонтали с глазом, и Солнце (если мы имеем дело с ним) не будет слепить нам глаза.

§2. … продолжение

- Зная, сколько раз поперечник закрывающего предмета укладывается в своей окружности, можно заключить, что столько же раз диаметр светила укладывается в своей окружности. Чтобы найти это отношение, надо узнать, сколько раз поперечник предмета укладывается в отрезке между глазом и предметом, а затем умножить результат на 2π. Если поперечник закрывающего предмета заметно превышает диаметр зрачка, можно считать зрачок точечным. Если же эти размеры сопоставимы, надо будет сделать поправку на конечный размер зрачка (Архимед).
- По результатам измерений Архимеда, приведённым в *Псаммите*, Солнце укладывается в своей окружности более 632, но менее 800 раз. Если перевести эти значения в наши меры, то получатся углы 35'55" и 27'. Действительный видимый поперечник Солнца (32') лежит в найденных Архимедом пределах, причем ближе к большему значению. Луна имеет близкий (меньший всего на 0'54", или на 1,5%) к Солнцу видимый угловой диаметр.

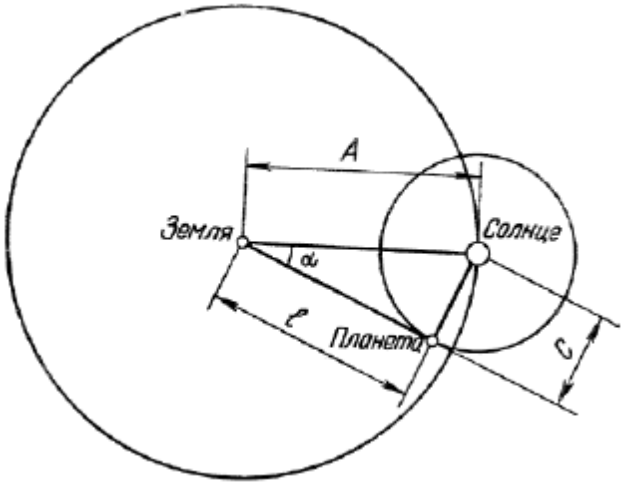
§2. … продолжение



- Рис. Система мира Архимеда (указаны межпланетные расстояния в мириадах стадий). a = 554, d = 5081, A = 5640, c = 2027, h = 2007, n = 4.
- В середине находится Земля, вокруг нее обращаются Луна и Солнце. Орбиты трех ближайших планет – Меркурия, Венеры и Марса – очерчены вокруг него.

§2. … продолжение

- Радиусы планетных орбит кратны между собой и относятся как 1:2:4. Интересно, что эти соотношения близко отражают действительность. По данным Архимеда, относительное (по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца) значение радиуса орбиты Меркурия составляет 0,36 (в действительности 0,39, ошибка 8%), орбиты Венеры 0,72 (совпадает с действительным), Марса 1,44 (в действительности 1,52, ошибка 5%). Такое совпадение не может быть случайным, ясно, что радиусы орбит этих планет получены на основе наблюдений с высокой по тем временам точностью.

- 

- Рис. Схема определения относительного радиуса орбиты планеты.

§2. … продолжение

- Справка (Wikipedia): Гиппа́рх Нике́йский (ок. 190 до н. э. – ок. 120 до н. э.; др.-греч. Ἵππαρχος) – древнегреческий астроном, механик, географ и математик II века до н. э., часто называемый величайшим астрономом античности. Главной заслугой Гиппарха считается то, что он привнёс в греческие геометрические модели движения небесных тел предсказательную точность астрономии Древнего Вавилона.

Метод Гиппарха определения расстояния до Луны (во время полного солнечного затмения)

1. Наблюдаем солнечное затмение из двух точек:
в г.Сиена – затмение полное, в г. Александрия – затмение частное
2. В г. Александрии наблюдатель видел 1/5 диска Солнца. Так как угловой диаметр Луны и Солнца почти одинаков и равен θ_0=30′, то θ=6′.
3. Тогда из треугольника ABC имеет, что $D_L = D / \theta$ (θ - в радианах)

§2. … продолжение

- Выполним расчёт расстояния от Земли до Луны по Гиппарху, помня, что расстояние от Александрии до Сиены составляет $D \approx 5000$ стадий $\times$ 158 м = 790 км.
- Угол $\theta = 6' = 2\pi \cdot 6'/(360 \cdot 60') = (\pi/1{,}8) \cdot 10^{-3}$ рад.
- Расстояние от Земли до Луны, оценочно, есть:
- $D_L \approx (790 \cdot 1{,}8/\pi)$ тыс. км = 452 тыс. км.
- Современное значение расстояния от Земли до Луны:
- $R_{ЗЛ}$ = 384,4 тыс. км.
- Погрешность в ~17% следует признать удовлетворительной, учитывая принципиальную неточность метода измерения.

- **Астрономические оценки античных математиков и астрономов смогли быть существенно улучшены лишь спустя почти 2000 лет – астрономами 17-18 вв.**

§2. … продолжение. Наше время

- Наглядное сравнение различных техник обучения, в том числе имитации реальной деятельности, дает «Конус обучения» профессора университета штата Огайо – Эдгара Дейла (1900–1985), представленный на рис. Наиболее эффективными являются методы обучения содержащие имитацию реальной деятельности или, лучше, выполнение реального профессионально-ориентированного действия.

§2. … продолжение.

- Автор полагает (**гипотеза подхода**, определяющая широкое применение экспериментально-лабораторного метода в обучении математике), что систематическое применение лабораторных работ по математике (ЛРМ) с обширным, но целесообразным, использованием цифровых технологий будет способствовать гармоничному формированию и развитию двух ипостасей обучающегося математике:
- обучающегося «математика-теоретика» (решение задач, построение математических моделей процессов и/или явлений окружающей действительности, нахождение решения в рамках математической модели, построение при необходимости алгоритма численного решения, обработка данных, интерпретация результатов, и др.);
- и обучающегося «математика-экспериментатора» (постановка натурного или виртуального эксперимента, подбор необходимых экспериментальных средств, реализация алгоритма численного решения, и др.).
- **Подход способствует активному формированию ФМГ.**

§2. … продолжение.

- Согласно различным подходам к классификации методов обучения, лабораторные работы относят: и к наглядным методам обучения; и к методам самостоятельной работы учащихся по осмыслению и усвоению нового материала; и к методам учебной работы по применению знаний на практике и выработке конкретных умений и навыков. Лабораторную работу можно определить как метод обучения и как форму организации учебного процесса:
- 1° Лабораторная работа – это такой метод обучения, при котором учащиеся под руководством учителя и по заранее намеченному плану проделывают опыты или выполняют определенные практические задания и в процессе их выполнения воспринимают и осмысливают новый учебный материал.
- 2° Лабораторная работа – это форма организации учебного процесса, направленная на получение навыков практической деятельности путем работы с материальными объектами или моделями предметной области курса.

§2. … продолжение.

- Лабораторная работа подразумевает проведение и анализ итогов определенного исследования, результаты которого получены опытным путем в специально созданных и контролируемых условиях. При выполнении лабораторных работ у учащихся формируются экспериментальные умения, которые включают в себя как интеллектуальные умения, так и практические. К первой группе могут быть отнесены следующие умения: определять цель эксперимента, выдвигать гипотезы, подбирать оборудование, планировать эксперимент, сравнивать, сопоставлять и анализировать результаты, делать выводы и обобщения. Ко второй группе относят умения: наблюдать, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков, экспериментировать, оформлять отчет о проделанной работе, и др.
- При выполнении лабораторных работ по математике (ЛРМ), как правило, не требуется специализированного оборудования; в ЛРМ изучаются математические модели.

§2. … продолжение.

- Для выявления уровня развития инновационного потенциала обучающихся, и мы разделяем этот подход, авторы монографии «Экспериментальная математика в школе» (М.В. Шабанова и др.) выделяют следующие уровни исследовательских лабораторных работ по математике:

- **I уровень – репродуктивный**.
- 1. учащиеся умеют применять понятия, законы, принципы, правила выполнения типовой лабораторной работы;
- 2. умеют решать, подсчитывать, объяснять;
- 3. полнота действий, обобщение, точность восприятия;
- 4. умение работать с литературой.

§2. … продолжение.

- **II уровень – репродуктивно-исследовательский**.
- 1. умение применять знания понятий, правила выполнения типовой лабораторной работы;
- 2. умение обрабатывать и объяснять полученные данные;
- 3. полнота, обобщенность действий при выполнении заданий с элементами исследовательского характера;
- 4. умение рассчитывать погрешность и анализировать результат.
- **III уровень – исследовательский**.
- 1. умение ставить проблему и формулировать гипотезу исследования;
- 2. умение предсказывать результаты, оценивать получение значения в лабораторной работе, применять законы для выполнения лабораторной работы;
- 3. умение переносить, трансформировать знания, прогнозировать результат, критически его оценивать, доказывать его справедливость, предлагать новые подходы.

§2. … продолжение.

- В настоящее время лабораторным работам по математике не уделяется достаточного внимания.
- ЛРМ, как правило, выполняются не систематически, от случая к случаю, и лишь некоторыми учителями.
- Причиной этого является недооценка лабораторных работ, ограниченность учебного времени, отсутствие необходимого учебного оборудования, недостаток методических разработок по использованию цифровых технологий в обучении математике, но в качестве главной причины, по-видимому, следует назвать отсутствие убежденности нынешних учителей и управленцев в сфере образования в возможности и необходимости использования ЛРМ как эффективного педагогического инструмента обучения математике современных подростков.

§2. … продолжение.

- K. Das по итогам своего исследования [7] подчеркивает важность лабораторной учебной деятельности при обучении математике и дает следующие рекомендации:
- – Лабораторное обучение математике может осуществляться на всех образовательных уровнях путем интеграции лабораторных работ по математике в обычную учебную программу – от начального школьного уровня до уровня подготовки учителей в педагогических колледжах и вузах.
- – Студенты, изучающие математику, и учителя математики должны быть обучены разнообразному использованию математических лабораторий при изучении методологии математики.
- – Учитель математики строит научно-образовательную среду с помощью математического оборудования.

§2. … продолжение.

- – Выполнение обучающимися лабораторных работ по математике должно оцениваться специальными отметками.
- – В каждой школе должна быть создана математическая лаборатория, и обучение подростков математике непременно должно осуществляться с ее использованием.
- – В каждом вузе, где присутствует изучение математики, должна быть построена математическая лаборатория, это обязательно.
- – Обучение лабораторному методу преподавания математики должно входить в программу повышения квалификации учителей математики.

§3. Лабораторные работы по математике как инструмент формирования и развития функциональной математической грамотности будущих учителей (из опыта КВМиМОМ УрГПУ)

«Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук»

Акад. Арнольд В.И.

- Об экспериментальных основаниях математики говорил и акад. Н.Н. Красовский.

§3. … продолжение

- Темы уровневых цифровых лабораторных работ по математике, апробированных на базе кафедры высшей математики и методики обучения математике ИМФИиТ УрГПУ (Екатеринбург) ([8-30], и др.).
- ЛРМ-1. Определение числа e путем оцифровки изображения висящей цепи.
- ЛРМ-2. Освоение метода Монте-Карло как инструмента статистического определения вероятностей случайных событий (на примере задачи о случайном треугольнике).
- ЛРМ-3. Измерение числа π методом Монте-Карло.
- ЛРМ-4. Измерение числа π методом Бюффона.
- ЛРМ-5. Пиксельный метод измерения числа π.
- ЛРМ-6. Пиксельный метод обоснования формул для вычисления площадей геометрических фигур.
- ЛРМ-7. Улучшаемые пиксельные ИТ-оценки мер плоских множеств.

§3. … продолжение

- ЛРМ-8. Определение статистической вероятности события в опытах со случайным бросанием объекта с нарушенной симметрией (на примере канцелярской кнопки).
- ЛРМ-9. Измерение геометрических характеристик участка земной поверхности с помощью мобильной геолокации.
- ЛРМ-10. Решение модельной задачи по оптимальной беспилотной транспортировке грузов с робототехнической реализацией.
- ЛРМ-11. Вероятность регистрации n ионизирующих частиц за время t счетчиком Гейгера.
- ЛРМ-12. Изучение закона охлаждения тела путем теплообмена,
- и др.

- **Форма отчета по лабораторной работе по математике**

- *Ф.И.О.*: _____, гр. _____ Дата: _____
- *Тема*: Указывается название работы.
- *Цель*: Указывается цель работы. Цель вытекает из темы ЛРМ.
- *Задачи*: Указываются шаги 1, 2, 3, …, ведущие к цели.
- *Гипотеза*: При необходимости.
- *Оборудование и материалы*: Дается краткое описание использованного оборудования и материалов, включая программное обеспечение.
- 1° *Теория*. Излагается теория по теме работы с указанием цитируемых первоисточников.
- 2° *Ход работы*. Дается описание хода работы, желательно – в виде последовательного алгоритма, возможно – в виде блок-схемы. Должно быть ясно: что делали, как, в какой последовательности, как и что фиксировали в качестве первичных результатов.

§3. … продолжение

- 3° *Результаты и обсуждение*. Приводятся (в табличном и графическом виде) результаты экспериментов и теоретических расчетов. Приводится оценка погрешностей эксперимента. Проводится сопоставление эксперимента с теорией.
- 4° *Выводы*. Кратко подводятся итоги работы, делается обоснованное суждение о том, решены ли задачи 1, 2, 3, …, и достигнута ли цель работы.
- *Список цитированной литературы*. Приводятся надлежащим образом оформленные ссылки на процитированные первоисточники.
- *Приложения*. Прикладываются протоколы испытаний, и т.п.

- Описанные ниже ЛРМ выполняли студенты 1-5 курсов очного и заочного отделений (всего более 200 чел.), обучающиеся в УрГПУ по направлениям подготовки «44.03.05 – Педагогическое образование. Математика и информатика» (о/о), «44.03.01 – Педагогическое образование. Математика» (з/о), «09.03.01 – Информационные системы и технологии. Профиль» (о/о и з/о), и др.

ЛРМ-1. «Определение числа *e* путем оцифровки изображения висящей цепи»

Цель: Путем оцифровки изображений цепи, свободно подвешенной в поле тяжести, измерить число e – одну из фундаментальных мировых констант.

Задачи: (1) изучить основы теории цепной линии; (2) разработать алгоритм выполнения работы; получить и оцифровать изображения висящей цепи; изучить основы статистической обработки данных; (3) подготовить отчет по ЛРМ, содержащий результат измерения числа e и оценку погрешности.

Оборудование и материалы: вертикальная рабочая поверхность, металлическая цепь, цифровая камера (смартфон), персональный компьютер с установленным ПО MS Office (MS Excel, MS Paint).

§3. … продолжение

Рис. 1 к ЛРМ-1. Подвешенная цепь; сплошная линия – расчет по формуле $y(x) = a\,\mathrm{ch}(x/a)$.

§3. … продолжение

- **1° Теория.** В разделе *Теория* кратко описывается теория цепной линии $y(x) = a\cdot\mathrm{ch}(x/a)$, где единственный параметр a есть расстояние от «дна» цепной линии до начала координат; получаются рабочие формулы для обработки результатов измерений. При отступе вправо от начала координат на величину a, получаем для измеряемой координаты

- $$y(a) = \tfrac{1}{2}\, a\cdot(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})$$

- – квадратное уравнение относительно числа e, понимаемого как неизвестный параметр. Аналогично – для отсчета влево, где измеряется $y(-a)$.

•

.

§3. … продолжение

- Корни этого уравнения оба положительны и равны, соответственно,

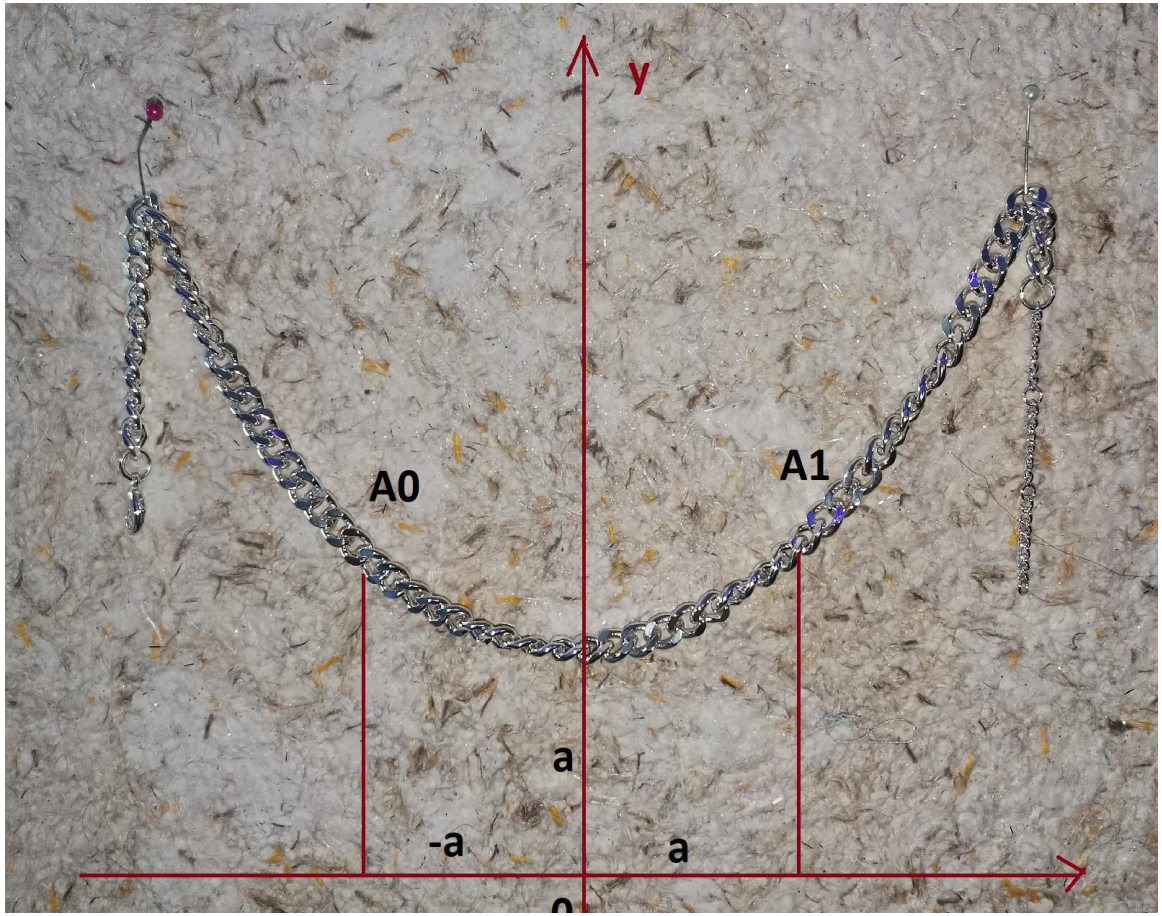
- $$e = \frac{y(a)}{a} + \sqrt{\left(\frac{y(a)}{a}\right)^2 - 1}, \quad \text{и} \quad e^{-1} = \frac{y(a)}{a} - \sqrt{\left(\frac{y(a)}{a}\right)^2 - 1}.$$

- Аналогично – для отсчета влево, где измеряется $y(-a)$. Ввиду конечного размера и неидеальности реальной цепи, результаты измерений величин $y(\pm a)$ могут несколько различаться. Поэтому следует независимо определять по два значения числа e с каждого обработанного изображения цепи и проводить усреднение полученных результатов.

§3. … продолжение

- **2° Ход работы.** Здесь обучающиеся приводят достаточно подробное описание хода работы:
- Выбор фона; выбор и подвешивание цепи.
- Фотофиксация свободно висящей цепи.
- Оцифровка изображения свободно висящей цепи (например, с помощью графического редактора MS Paint) с восстановлением координатных осей.
- Подготовка расчетных формул (например, в MS Excel).
- Статистическая обработка результатов.

§3. … продолжение

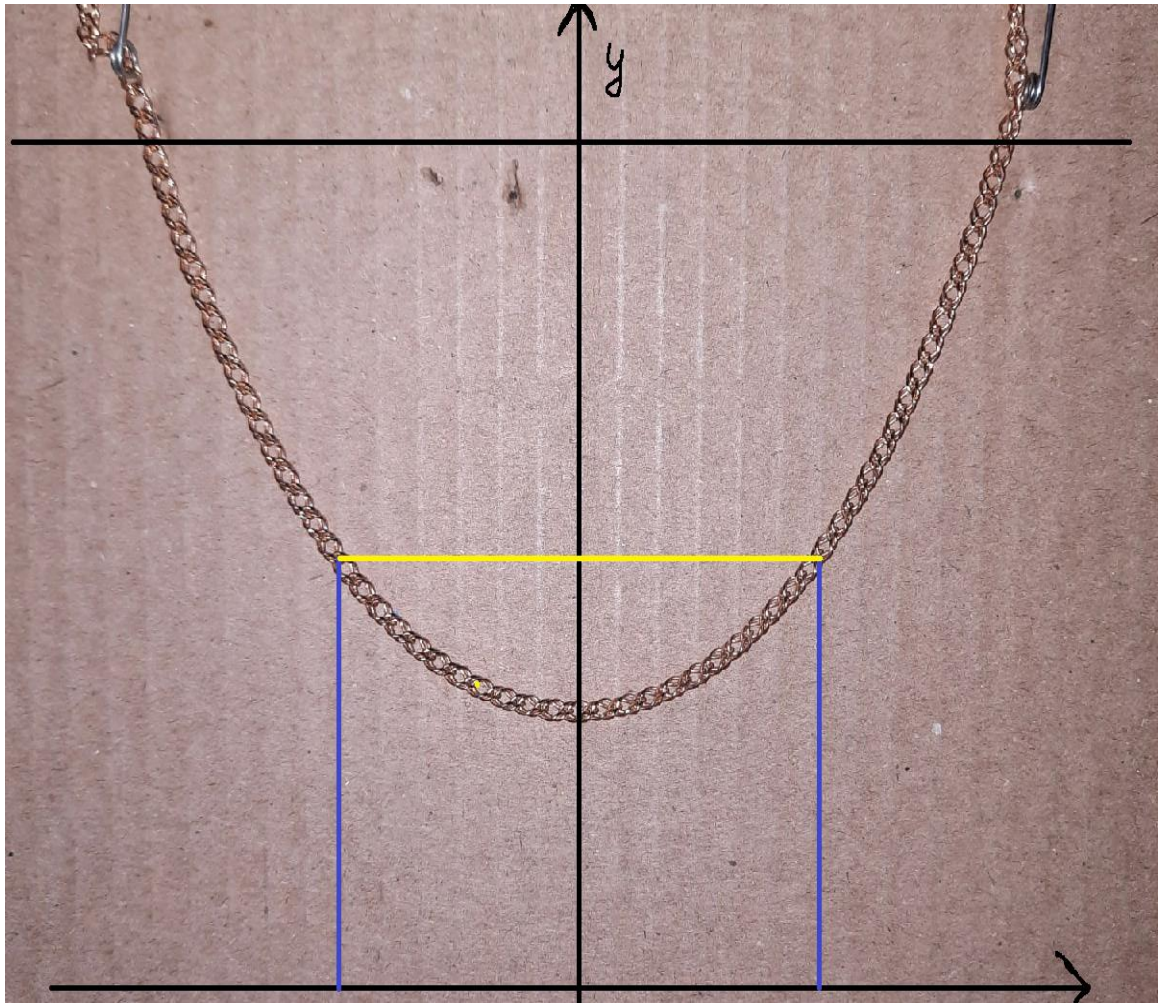


Примеры снимков свободно висящей цепи (из прил. к студенческим Отчетам по ЛРМ)

§3. … продолжение

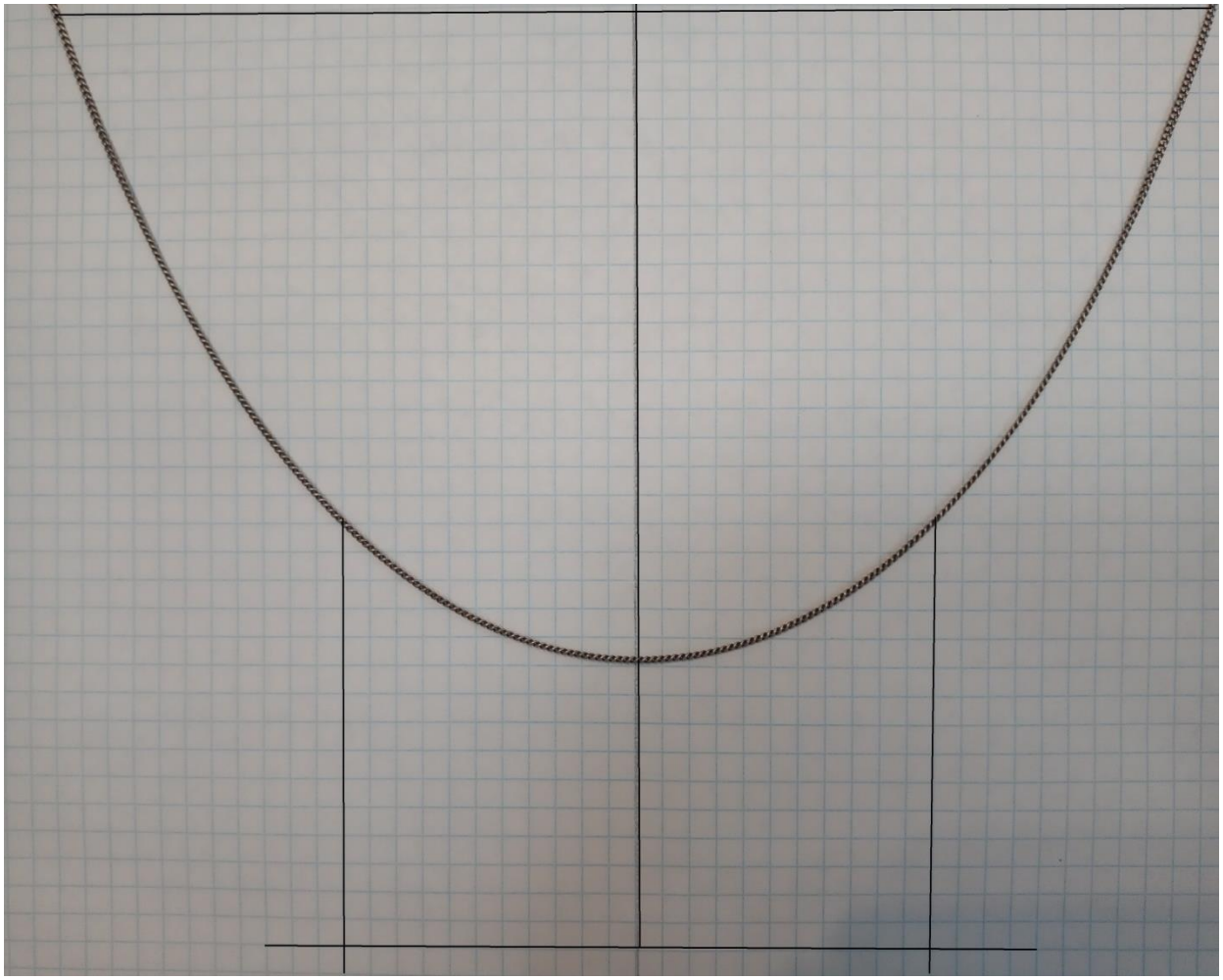
Примеры снимков свободно висящей цепи (из прил. к студенческим Отчетам по ЛРМ)

§3. … продолжение



Примеры снимков свободно висящей цепи (из прил. к студенческим Отчетам по ЛРМ)

§3. … продолжение



Примеры снимков свободно висящей цепи (из прил. к студенческим Отчетам по ЛРМ)

§3. … продолжение

- **3° Результаты и обсуждение.** В разделе *Результаты и обсуждение* представлены результаты измерений и стат. обработки первичных данных в табличном и графическом виде (рис. 1 к ЛРМ-1). Видно, что функция $y(x) = a \cdot \mathrm{ch}(x/a)$ является вполне адекватной моделью реальной цепи.

- Таблица. Рез-ты вычисления числа e_{exp} по фото изображениям свободно висящей цепи.

Фото	Отсчет вправо (+*a*)	Отсчет влево (–*a*)
1	2,699596	2,625716
2	2,651635	2,607666
3	2,744553	2,655041
4	2,775879	2,705415
5	2,778975	2,740699
Среднее ± СКО	2,699 ± 0,062	

§3. … продолжение

- **4° Выводы.** В разделе *Выводы* подводятся итоги ЛРМ; в пределах статистической погрешности по 10-ти определениям числа e (5 снимков), экспериментально измеренное значение e_{exp} = 2,699 ± 0,062 согласуется с «точным» e = 2,71828. Относительная ошибка определения составляет $100\%|e_{exp}/e - 1| = 0{,}73\%$.
- **Список цитированной литературы.** В этом разделе приводятся надлежащим образом оформленные ссылки на процитированные первоисточники.
- **Приложения.** Здесь представлены результаты статистической обработки данных первичных измерений (в виде файла MS Excel) и подвергнутые цифровой обработке фотоизображения цепи (5 снимков).

§3. … продолжение

- *Комментарий к ЛРМ-1*:
- Обучающиеся заранее получили задание самостоятельно ознакомиться с теорией предлагаемого метода измерения числа e (модель перевернутого класса), а также подготовить идеи относительно натурной и компьютерной реализации метода (разработать блок-схемы).
- В процессе краткого собеседования перед началом ЛРМ выяснилось, что выделяются три группы студентов, готовых к выполнению ЛРМ, соответственно, на репродуктивном (большинство), частично-исследовательском и исследовательском уровне.
- Наиболее подготовленные студенты не только грамотно выполнили работу и провели статистическую обработку данных, но предложили идею улучшения метода путем поиска оптимального положения координатных осей (исследовательский уровень).

ЛРМ-2. «Пиксельный метод обоснования формул для вычисления площадей геометрических фигур»

Цель: Освоить пиксельный метод обоснования формул для вычисления площадей геометрических фигур, установить справедливость формулы площади квадрата $S_{a\times a} = a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}_+$.

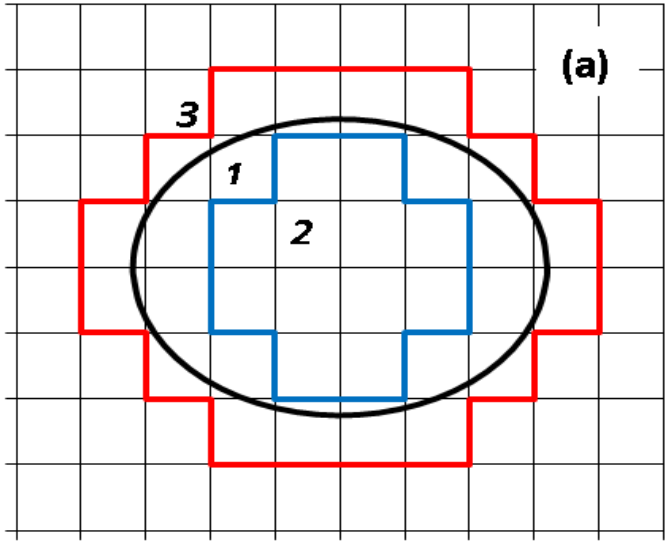
Задачи: (1) изучить основы теории мер плоских множеств; (2) освоить пиксельный метод обоснования формул для вычисления площадей геометрических фигур; (3) разработать алгоритм выполнения работы; (4) установить справедливость формулы площади квадрата $S_{a\times a} = a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}_+$; (5) подготовить отчет по ЛРМ.

Оборудование и материалы: персональный компьютер с установленным ПО MS Office (MS Excel, MS Paint); бумага в клетку (опционно).

.

§3. … продолжение

- **1° Теория.** В разделе *Теория* кратко описывается теория оценки мер (площадей) S множеств на числовой плоскости пиксельным методом – путем подсчета целочисленной площади S_{inn} максимального вписанного целочисленного многоугольника и подсчета целочисленной площади S_{out} минимального описанного целочисленного многоугольника



§3. … продолжение

- Докажем статистически с применением пиксельного метода оценки площадей фигур, что площадь квадрата, в самом деле, выражается известной формулой
- $S_{a \times a} = a^2, \forall a \in \mathbb{R}_+$.
- Если $a \in \mathbb{N}$, - тривиально. Рассмотрим общий случай. Положим, что
- $S_{a \times a} = k\, a^2$.
- Основная (статистическая) гипотеза: H_0: $k = 1$.
- Конкурирующая гипотеза: H_1: $k \neq 1$.
- Применим статистический подход.
- Эксперимент организуем таким образом, чтобы он мог быть, в т.ч. натурно, воспроизведен при изучении математики или информатики в существующих условиях любой образовательной организации при любом наличном уровне математической подготовленности обучающихся.

- ПЛАН ИМИТАЦИОННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА:
- 1°. С помощью генератора случайных чисел, например, MS Excel, генерируется случайная сторона квадрата $a \in \mathbb{R}_+$ в диапазоне, скажем, от 0 до 16 см, так, чтобы «генерируемые» случайные квадраты Ф могли быть изображены на листе обычной школьной тетради в клетку. Изображения «генерируемых» случайных квадратов $S_{a\times a}$ могут быть представлены и на экране монитора с построенной пиксельной сеткой или с использованием «естественных» пикселей экрана. Пусть левый нижний угол квадратов совпадает с началом системы координат.
- 2°. В качестве внутренней меры S_{inn} очередного квадрата со случайной стороной a принимается величина $[a]^2$, где $[a]$ – целая часть случайного числа a. Действительно, квадрат $[a]\times[a]$ есть максимальный целочисленный квадрат, вписанный в данный случайный квадрат $a\times a$.

§3. … продолжение

- 3°. В качестве внешней меры S_{out} очередного квадрата со случайной стороной a принимается величина $([a] + 1)^2$. Квадрат $([a] + 1)\times([a] + 1)$ есть минимальный целочисленный квадрат, покрывающий квадрат $a\times a$.
- 4°. За оценку меры (площади) случайного квадрата $a\times a$ принимается величина $S_{a\times a} = \langle S\rangle \pm \delta\langle S\rangle$, где $\langle S\rangle = ½\cdot(S_{inn} + S_{out})$ и $\delta\langle S\rangle = ½\cdot(S_{out} - S_{inn})$.
- 5°. На график зависимости $S_{a\times a}$ от a^2 наносится точка с соответствующими координатами и, факультативно, с планками погрешности.
- 6°. При накоплении заданного числа N таких точек строится прямая линейной регрессии $S_{a\times a} = k\ a^2$ с определением случайного углового коэффициента k методом наименьших квадратов.

§3. … продолжение

- 7°. При накоплении заданного числа n определений углового коэффициента k, являющегося случайной величиной (с.в.), строится частотная гистограмма статистического распределения с.в. k с определением ее числовых характеристик (выборочное среднее $\langle k \rangle$, исправленное среднеквадратичное отклонение (СКО) s.
- 8°. Проверяется статистическая гипотеза о незначимом/значимом отличии выборочного среднего $\langle k \rangle$ от единицы на выбранном уровне статистической значимости α. Статистически незначимое отличие среднего значения $\langle k \rangle$ от 1 будет свидетельствовать о справедливости формулы площади квадрата.
- 9°. Расчеты по пп. 1° – 8° могут быть повторены при квартовании пиксельной сетки, что повысит точность оценок и достоверность выводов.

§3. … продолжение

- **2° Ход работы.** Здесь обучающиеся приводят достаточно подробное описание хода работы:
- Разработка блок-схемы натурного или имитационного эксперимента.
- Подготовка рабочего поля на листе MS Excel.
- Проведение имитационного эксперимента (в натурном или компьютерном виде). Первичная обработка данных.
- Построение корреляционной диаграммы ‹*S*› *vs.* a^2.
- Статистическая обработка результатов.

- **3° Результаты и обсуждение.** В разделе *Результаты и обсуждение* представлены результаты измерений и стат. обработки первичных данных в табличном и графическом виде (рис. 2 к ЛРМ-2).

§3. … продолжение

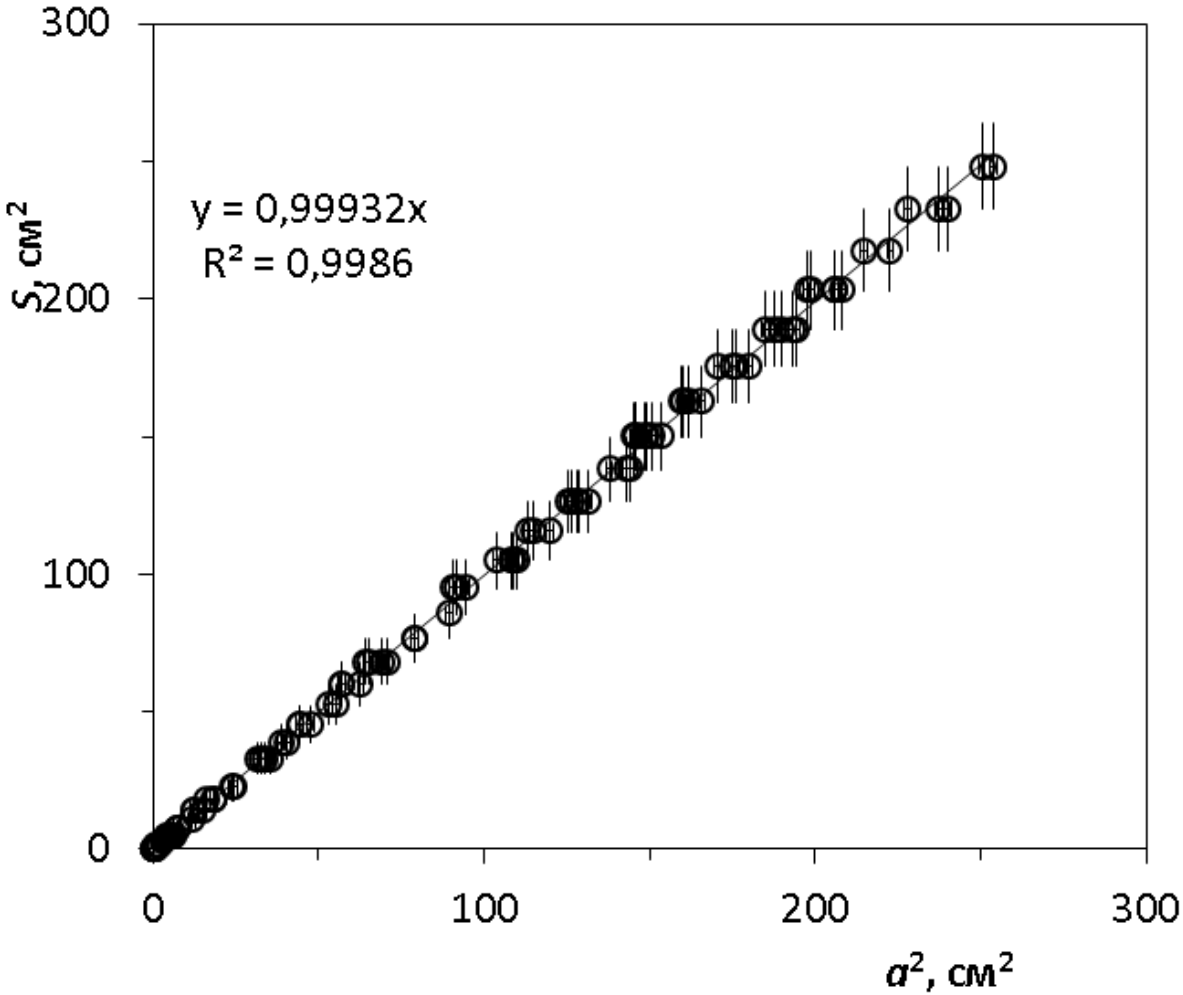


Рис. 2 Корреляционная зависимость $S_{a\ xa}$ от a^2, n = 100 точек. Сплошная линия – прямая линейной регрессии.

§3. … продолжение

- Таблица. Результаты определения углового коэффициента *k* в корреляционной зависимости ‹*S*› *vs.* a^2 (10 определений по 100 точкам).

k_i	k_i
1,000484	1,002456
1,001024	1,000878
1,004748	0,999765
0,994481	0,998830
0,990512	0,998410
Среднее ± СКО	0,9992 ± 0,0041

- **4° Выводы.** В пределах статистической погрешности по 10-ти определениям углового коэффициента k по 100 точкам на корреляционной диаграмме $\langle S \rangle$ *vs.* a^2, «экспериментально» измеренное значение $k_{exp} = 0{,}9992 \pm 0{,}0041$ согласуется с точным $k = 1$. Относительная ошибка определения составляет $100\% \,|\, k_{exp}/k - 1 \,| = 0{,}08\%$.
- **Список цитированной литературы.** В этом разделе приводятся надлежащим образом оформленные ссылки на процитированные первоисточники.
- **Приложения.** Здесь представлены результаты статистической обработки данных первичных измерений (в виде файла MS Excel).

§3. … продолжение

ПЛОЩАДИ ОСНОВНЫХ ФИГУР ШКОЛЬНОЙ ПЛАНИМЕТРИИ С ГРАНИЦЕЙ – ЛОМАНОЙ (ПРЯМОУГОЛЬНИК, ТРЕУГОЛЬНИК, ПАРАЛЛЕЛОГРАММ, ТРАПЕЦИЯ).

- На основании единственно установленной и статистически формулы площади квадрата $S_{axa} = a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}_+$, могут быть последовательно и без каких-либо дополнительных допущений выведены формулы площади основных фигур школьной планиметрии с границей – ломаной (прямоугольник, треугольник, параллелограмм, трапеция). Определения фигур даны во всех авторских курсах геометрии; можно принять любое из них, напр., «по Атанасяну».
- Данные ниже выводы площадей фигур, в целом, известны и не претендуют на оригинальность; они приведены лишь для обеспечения единства и последовательности изложения.

.

§3. … продолжение

П р я м о у г о л ь н и к. Рассмотрим прямоугольник $S_{a\times b}$ со сторонами a и b ($\forall a, b \in \mathbb{R}_+$). Дополним прямоугольник $S_{a\times b}$ до квадрата $S_{(a+b)\times(a+b)}$ так, как показано на рис. 4.

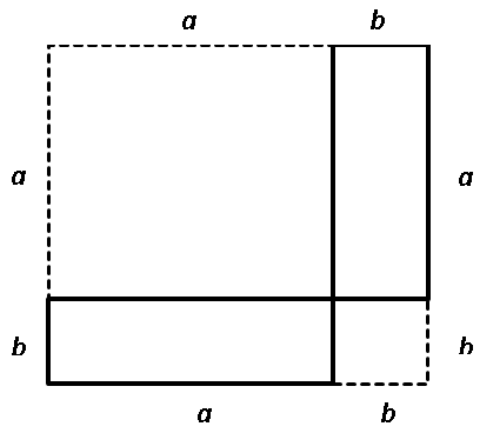


Рис. 4 Прямоугольник $S_{a\times b}$, дополненный до квадрата $S_{(a+b)\times(a+b)}$.

Ясно,

$$S_{(a+b)\times(a+b)} = (a+b)^2 = 2\,S_{a\times b} + a^2 + b^2,$$

откуда,

$$S_{a\times b} = a\cdot b. \blacksquare$$

§3. … продолжение

П р я м о у г о л ь н ы й т р е у г о л ь н и к. Прямоугольный треугольник $S_{\triangle_a\times b}$ с катетами a и b очевидным образом может быть дополнен до прямоугольника $S_{a\times b}$ (рис. 5), поэтому $S_{\triangle_a\times b} = ½\cdot a\cdot b$. ■

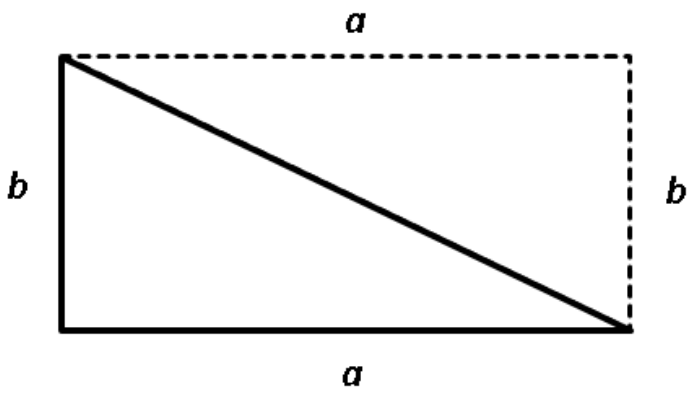


Рис. 5 Прямоугольный треугольник $S_{\triangle_a\times b}$, дополненный до прямоугольника $S_{a\times b}$.

§3. … продолжение

П р о и з в о л ь н ы й т р е у г о л ь н и к. Произвольный треугольник $\triangle ABC$ может быть либо разбит на два прямоугольных треугольника (рис. 6(а)), либо дополнен до прямоугольного треугольника (рис. 6(б)) при опускании высоты h на основание a или его продолжение.

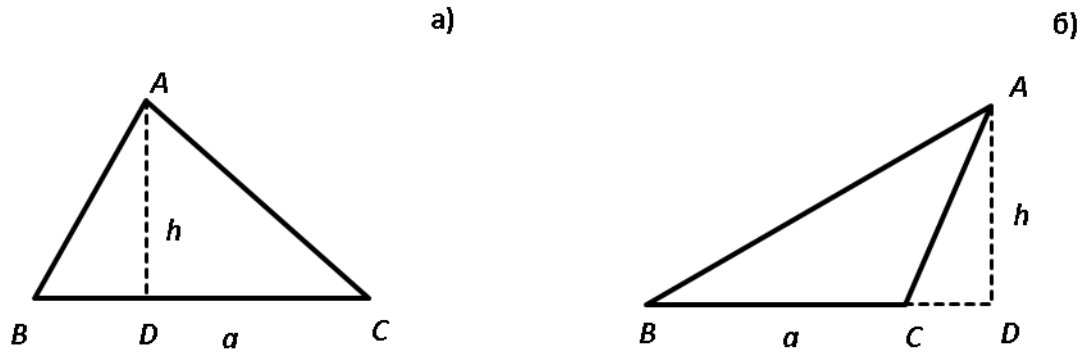


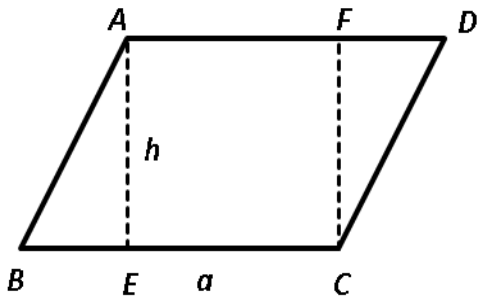
Рис. 6 Произвольный треугольник $\triangle ABC$, разбитый на два прямоугольных треугольника (а) или дополненный до прямоугольного треугольника (б).

§3. … продолжение

- В первом случае площадь $\triangle ABC$ равна
- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} BD \cdot AD + \frac{1}{2} CD \cdot AD =$
- $= \frac{1}{2} (BD + CD) \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot h,$ ■
- где $a = BC$, $h = AD$.
- Во втором случае
- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} BD \cdot AD - \frac{1}{2} CD \cdot AD =$
- $= \frac{1}{2} (BD - CD) \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot h.$ ■

§3. … продолжение

- П а р а л л е л о г р а м м. Параллелограмм может быть разбит на два равновеликих прямоугольных треугольника и прямоугольник (рис. 7).



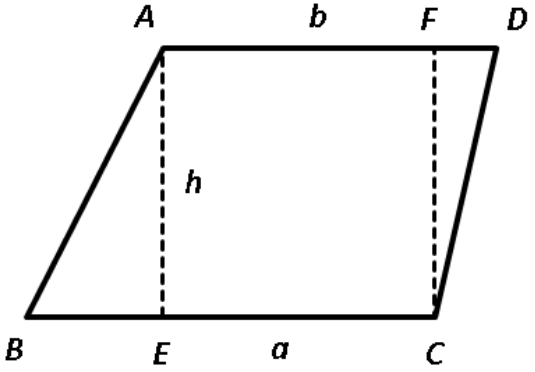
- Рис. 7 Параллелограмм *ABCD*, разбитый на два равновеликих прямоугольных треугольника и прямоугольник.

§3. … продолжение

- Здесь
- $S_{ABCD} = S_{AECF} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDF} =$
  - $= CE \cdot AE + \frac{1}{2} BE \cdot AE + \frac{1}{2} DF \cdot AE = (CE + \frac{1}{2} BE + \frac{1}{2} DF) \cdot AE =$
    - $= (CE + BE) \cdot AE = a \cdot h$, ■
- где $a = BC = AD$, $h = AE$ и $BE = DF$.
- *Комментарий*. Альтернативный вывод формулы для площади параллелограмма предоставляется обучающимся: дополнение параллелограмма двумя равновеликими прямоугольными треугольниками до прямоугольника.

§3. … продолжение

- Т р а п е ц и я. Трапеция может быть разбита на два неравновеликих прямоугольных треугольника и прямоугольник (рис. 8):

- 

- Рис. 8 Трапеция *ABCD*, разбитая на два неравновеликих прямоугольных треугольника и прямоугольник.

§3. … продолжение

- Здесь:

  - $S_{ABCD} = S_{AECF} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDF} =$
    - $= CE \cdot AE + \frac{1}{2} BE \cdot AE + \frac{1}{2} DF \cdot AE =$
    - $= [\frac{1}{2}(CE+AF) + \frac{1}{2} BE + \frac{1}{2} DF] \cdot AE =$
      - $= [\frac{1}{2}(BE+CE) + \frac{1}{2}(AF+FD)] \cdot AE = \frac{a+b}{2} \cdot h$, ■

- где $a = BC = BE+CE$; $b = AD = AF+FD$, $h = AE$.

- *Комментарий*. Альтернативный вывод формулы для площади трапеции предоставляется обучающимся: дополнение трапеции двумя неравновеликими прямоугольными треугольниками до прямоугольника.

§3. … продолжение

- Таким образом, установленной формулы площади квадрата оказалась достаточно для последовательного элементарного вывода формул площадей всех основных фигур школьной планиметрии с границей – ломаной (прямоугольник, треугольник с произвольными сторонами, параллелограмм, произвольная трапеция).
- Все рассмотренные фигуры являются выпуклыми, однако сам подход может быть легко распространен и на невыпуклые фигуры – после их разбиения на простые выпуклые фигуры (треугольники, прямоугольники и т.п.).

ЛРМ-3. «Пиксельный метод измерения числа π»

Цель: Пиксельным методом измерить число π – одну из фундаментальных мировых констант.

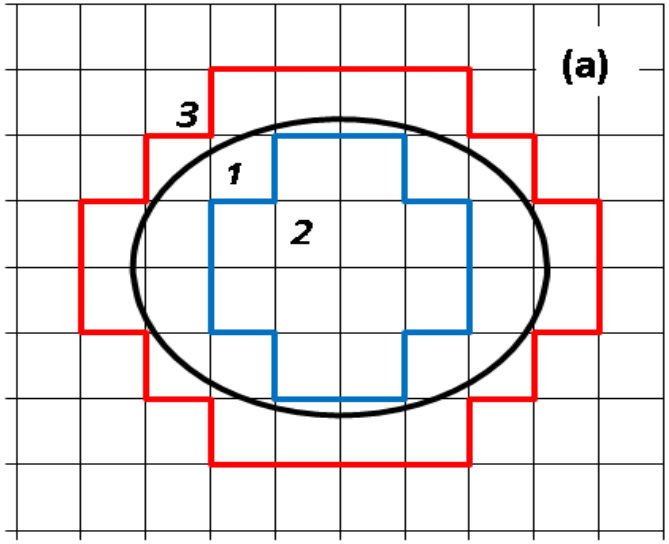
Задачи: (1) изучить основы теории мер плоских множеств; (2) освоить пиксельный метод определения площади круга (или его части); (3) разработать алгоритм выполнения работы; (4) установить справедливость формулы площади круга $S = \pi R^2$, $\forall R \in \mathbb{R}_+$; (5) определить число π; (6) подготовить отчет по ЛРМ.

Оборудование и материалы: персональный компьютер с установленным ПО MS Office (MS Excel, MS Paint); бумага в клетку (опционно); циркуль (опционно).

.

- **1° Теория.** В разделе *Теория* кратко описывается теория оценки мер (площадей) S множеств на числовой плоскости пиксельным методом – путем подсчета целочисленной площади S_{inn} максимального вписанного целочисленного многоугольника и подсчета целочисленной площади S_{out} минимального описанного целочисленного многоугольника

.



§3. … продолжение

- На практике бывает удобно оценивать пиксельную меру не целого круга, а его четвертой части (четвертины) $\Phi_{1/4}$ с центром в начале координат, так, как показано на рис. 9.
- Четверть дуги окружности желаемого радиуса R (удобно выбрать $3 \leq R \leq 16$ см, с шагом 0,25 см (½ тетрадной клетки)) можно аккуратно построить и без циркуля, – с помощью линейки. Здесь педагогу уместно предложить обучающимся самим придумать и реализовать алгоритм такого построения.
- Пиксельный метод позволяет получать оценки площадей фигур и в отсутствие профессиональных чертежных инструментов. В качестве единичного пикселя примем одну тетрадную клетку, что удобно и всегда доступно в практике образовательного процесса.

§3. … продолжение

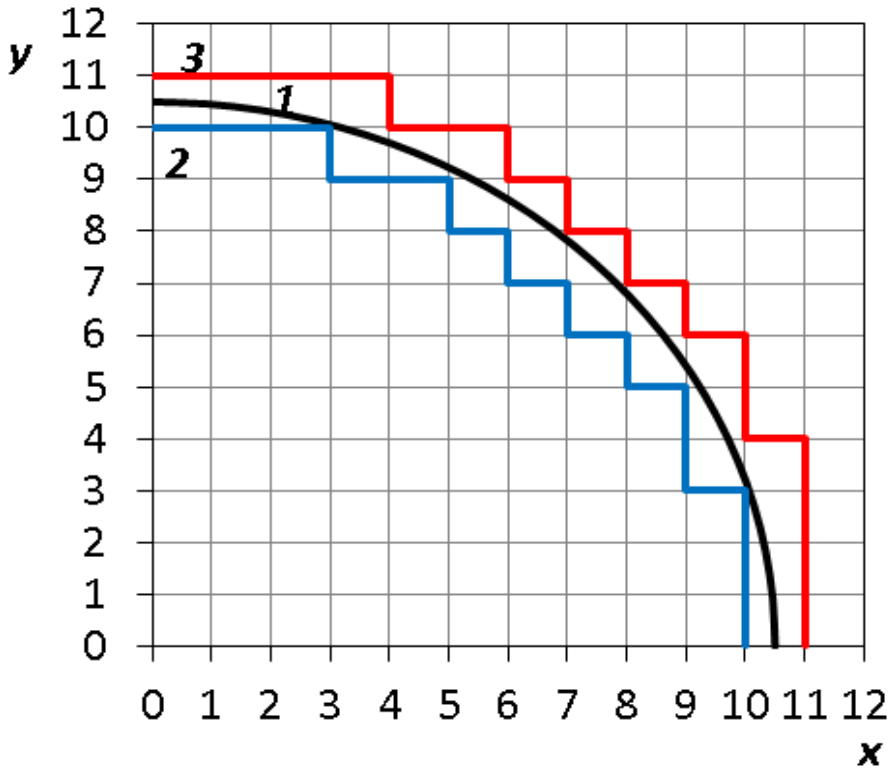


Рис. 9 К пиксельной оценке меры плоского множества. Кривая 1 – граница множества $\Phi_{1/4}$ (четверть круга радиусом R = 10,5 с центром в точке $O(0; 0)$); ломаная 2 – граница максимального вписанного целочисленного многоугольника для оценки внутренней меры множества $S_{1/4}$; ломаная 3 – граница минимального описанного целочисленного многоугольника для оценки внешней меры множества $S_{1/4}$.

- **2° Ход работы.** Здесь обучающиеся приводят достаточно подробное описание хода работы:
- Разработка блок-схемы натурного или имитационного эксперимента.
- Подготовка рабочего поля на листе MS Excel.
- Проведение имитационного эксперимента (в натурном или компьютерном виде). Первичная обработка данных.
- Построение корреляционной диаграммы 4 $S_{1/4}$ *vs.* R^2.
- Статистическая обработка результатов.

- **3° Результаты и обсуждение.** В разделе *Результаты и обсуждение* представлены результаты измерений и стат. обработки первичных данных в табличном и графическом виде (рис. 9 к ЛРМ-3).

§3. … продолжение

- Таблица Пиксельные оценки площадей четвертей кругов различных радиусов *R*; размер пикселя 1 пкс = 0,5 см = 1 кл.

R, пкс	R^2, пкс^2	$\frac{1}{4}S_{inn}$, пкс^2	$\frac{1}{4}S_{out}$, пкс^2	$\langle S_{1/4}\rangle$, пкс^2	$\delta\langle S_{1/4}\rangle$, пкс^2
7,5	56,25	37	52	44,5	7,5
12,5	156,25	110	135	122,5	12,5
14,5	210,25	152	181	166,5	14,5
17,5	306,25	226	261	243,5	17,5
21,5	462,25	343	386	364,5	21,5
22,5	506,25	377	422	399,5	22,5
24,5	600,25	447	496	471,5	24,5
29,5	870,25	654	713	683,5	29,5
32	1024	770	833	801,5	31,5

§3. … продолжение

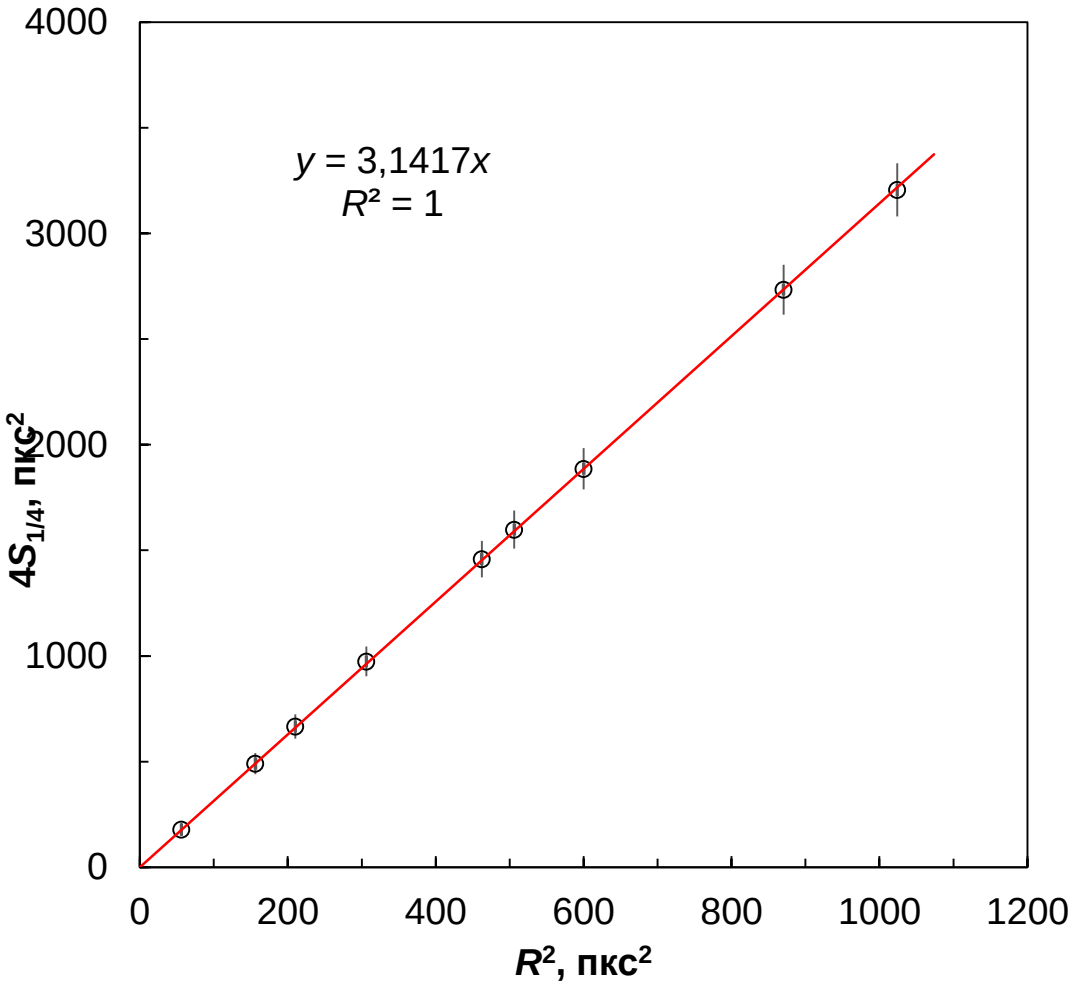


Рис. 10. Корреляционная зависимость площади круга $4S_{1/4}$ от квадрата радиуса R^2. Сплошная линия – прямая линейной регрессии.

- 4° **Выводы.** Статистическая обработка эмпирических данных с помощью инструмента статистической обработки данных MS Excel (Данные – Анализ данных – Регрессия) дала $\pi_{exp} = 3{,}14165 \pm 0{,}00415$, или $\delta\pi_{exp}/\pi_{exp} = 0{,}132\%$. Ошибка по отношению к точному значению числа π почти на два порядка меньше: $(\pi_{exp}/\pi - 1)\cdot 100\% = 0{,}00189\%$.
- **Список цитированной литературы.** В этом разделе приводятся надлежащим образом оформленные ссылки на процитированные первоисточники.
- **Приложения.** Здесь представлены результаты статистической обработки данных первичных измерений (в виде файла MS Excel), а также рис. к ЛРМ.

§3. … продолжение

- *Комментарий*. Данные измерений одного обучающегося могут быть не слишком точны. Однако есть возможность объединить данные многих обучающихся.
- На рис. 11 представлены обобщенные результаты проведенной в нескольких студенческих группах лабораторной работы «Пиксельный метод измерения числа π». Статистическая обработка данных фактических измерений, выполненных нашими студентами (156 наблюдений; 1 пкс = 1 тетрадная клетка; $3 \leq R \leq 35$ с шагом 0,5 пкс) дала $\pi_{exp} = 3{,}1457 \pm 0{,}0059$ с коэффициентом корреляции $r = 0{,}9995$.
- Таким образом, обучающиеся смогут наблюдать проявление закона больших чисел.

§3. … продолжение

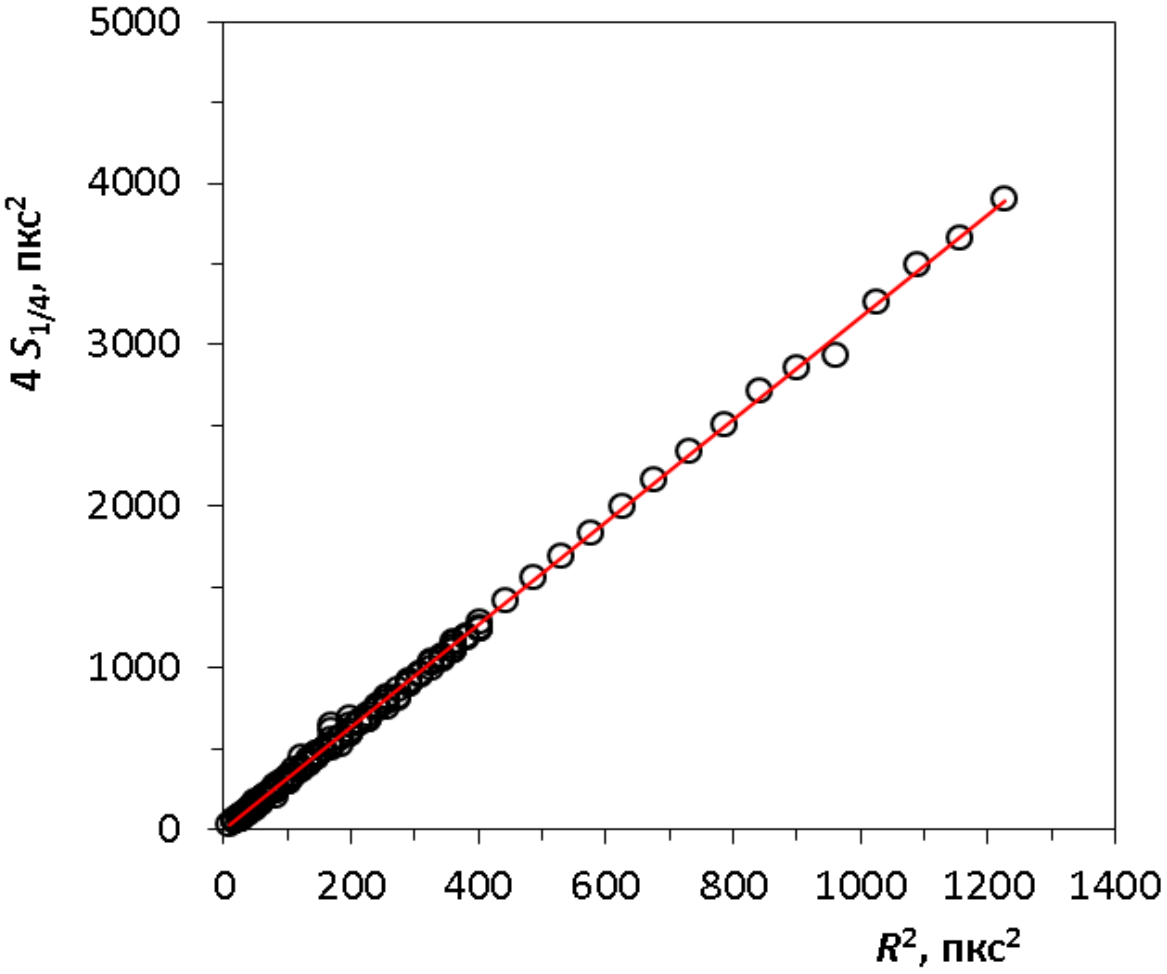


Рис. 11. Корреляционная зависимость площади круга $4S_{1/4}$ от квадрата радиуса R^2. Сплошная линия – прямая линейной регрессии.

ЛРМ-4. Изучение закона охлаждения тела путем теплообмена.

Цель: Освоение математической модели, описывающей охлаждение тела путём теплообмена с окружающей средой.

Задачи: (1) Изучить учебную литературу по физическим механизмам и математическим моделям теплообмена тела с окружающей средой; (2) изучить методы измерения и фиксации температуры тела; (3) с помощью оборудования «Цифровой лаборатории по математике» провести динамические измерения температуры $T(t)$ тела, находящегося в условиях теплообмена с окружающей средой; (4) провести верификацию математической модели охлаждения тела при теплообмене.

Оборудование и материалы: Оборудование «Цифровой лаборатории по математике» (датчик температуры, USB-кабель, стакан с горячей водой, компьютер с программой «ЦЛ по математике), ПК со стандартным ПО.

1° Теория. Согласно математической модели явления, скорость $dT(t)/dt$ изменения температуры тела $T(t)$ со временем t прямо пропорциональна разности $T(t) - T_0$, где T_0 – температура окружающей среды. С использованием физического смысла производной как скорости процесса, сказанное может быть выражено в форме дифф. уравнения:

$$dT/dt = -k\,(T - T_0),$$

где k – коэффициент теплообмена (k = Const > 0). Т. о., если измерить временную зависимость температуры $T(t)$ нагретого тела, остывающего в среде с неизменной температурой T_0, то зависимость dT/dt vs. T должна быть линейной, с угловым коэффициентом, равным $-k$.

2° Ход работы. После сборки экспериментальной установки (рис.), устанавливаются подходящие рабочие параметры компьютерной программы: температурный диапазон $0 < T(^\circ\ \mathrm{C}) < 100$, временной диапазон $0 < t(\mathrm{c}) < 2000$, частота опроса, и др. Датчик температуры опускается в стакан с нагретой водой и запускается компьютерная программа для фиксации результатов эксперимента.

3° Результаты и обсуждение. Результаты эксперимента в графическом виде приведены на рис. Получен также протокол испытаний в табличном виде в формате .txt. Обработка данных проведена с помощью инструментов MS Excel. На рис. приведена зависимость скорости изменения температуры тела $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ от температуры тела T. Видно, что точки $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t(T)$ ложатся на прямую линию тренда в области температур $321 < T(\mathrm{K}) < 343$ ($48 < T(^\circ\ \mathrm{C}) < 70$).

§3. … продолжение

Методом наименьших квадратов (линейная регрессия) найдено, что коэффициент теплообмена равен $k = (9{,}16 \pm 0{,}38)\cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, температурный параметр $T_0 = 309{,}6 \pm 13{,}2$ К.

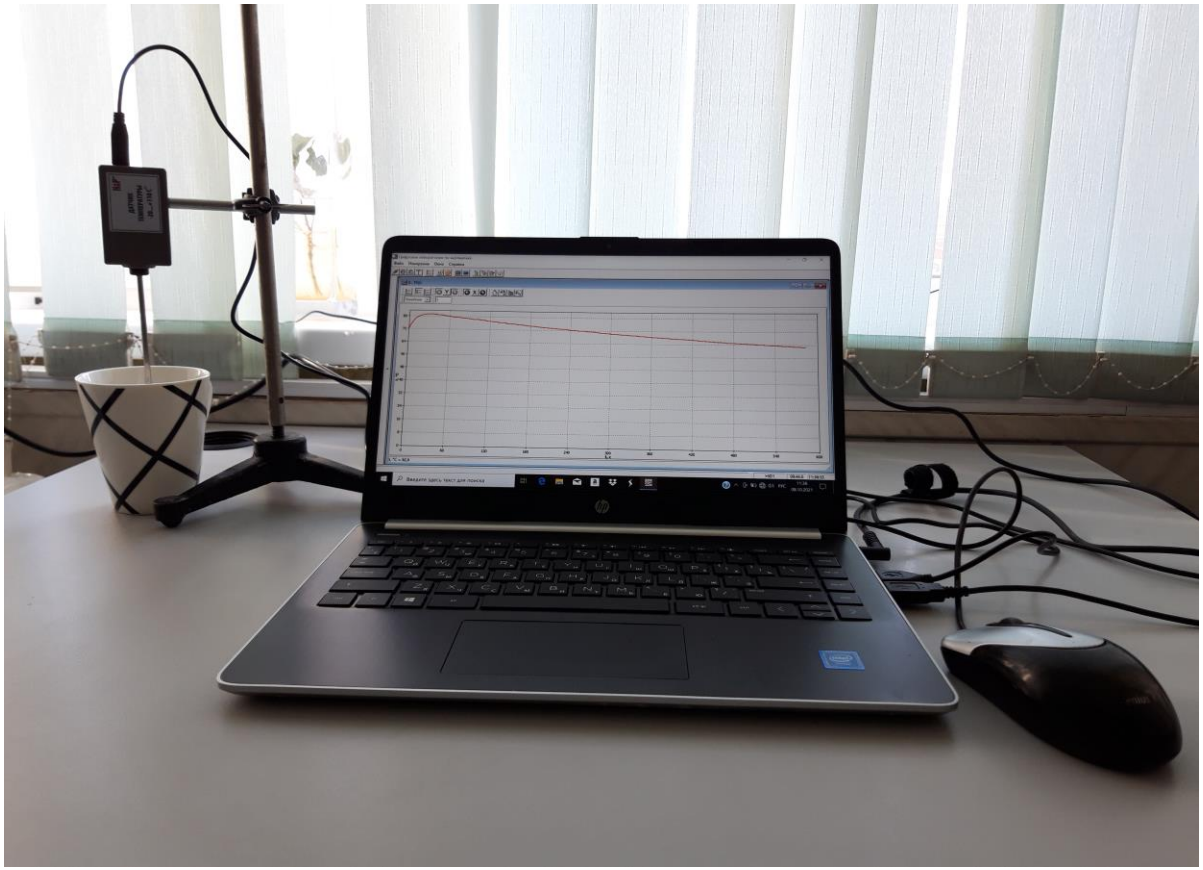


Рис. Экспериментальная установка к ЛРМ-2 «Изучение закона охлаждения тела путем теплообмена».

§3. … продолжение

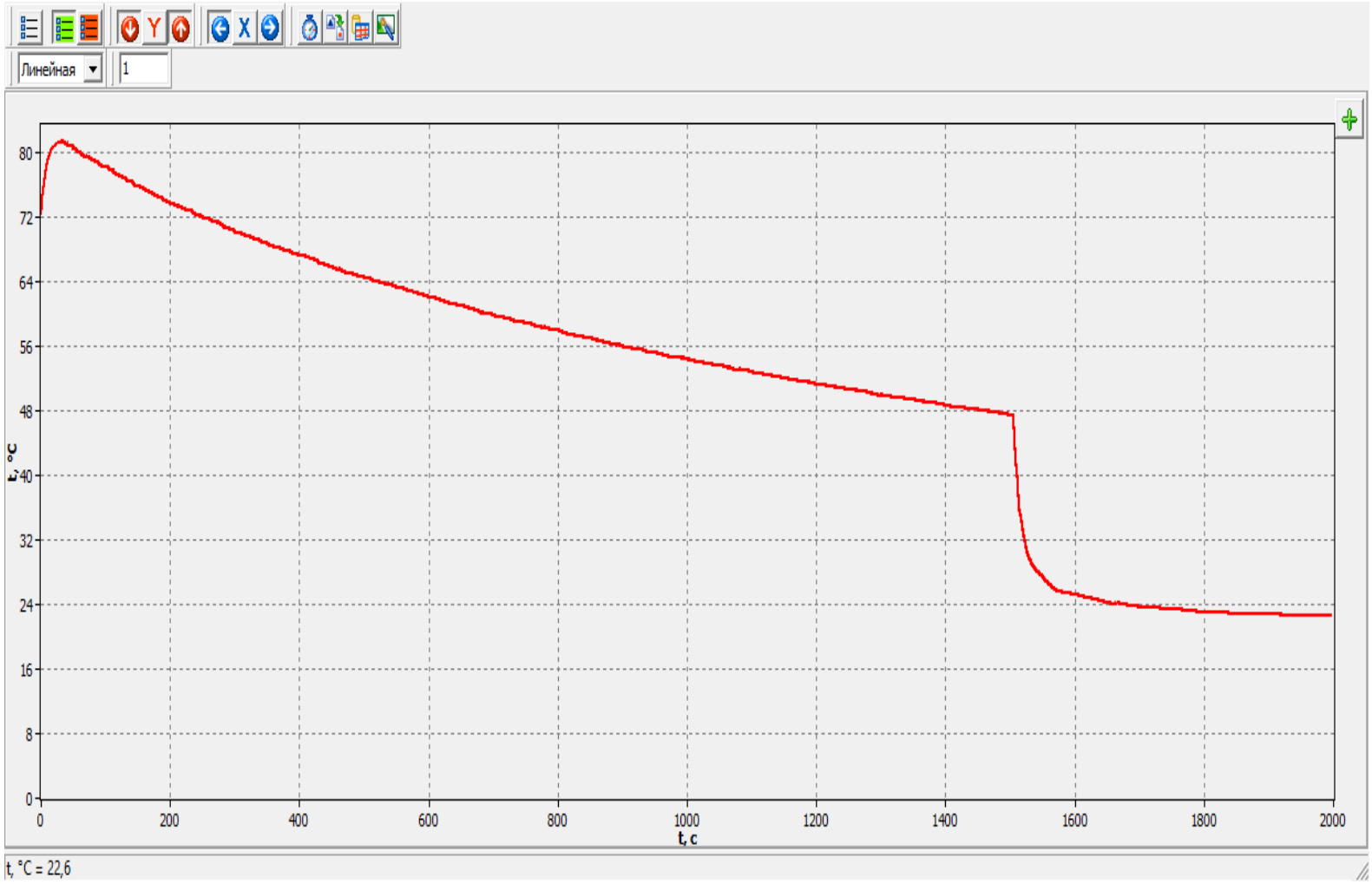


Рис. Кривая остывания тела в ЛРМ-4 «Изучение закона охлаждения тела путем теплообмена».

§3. … продолжение

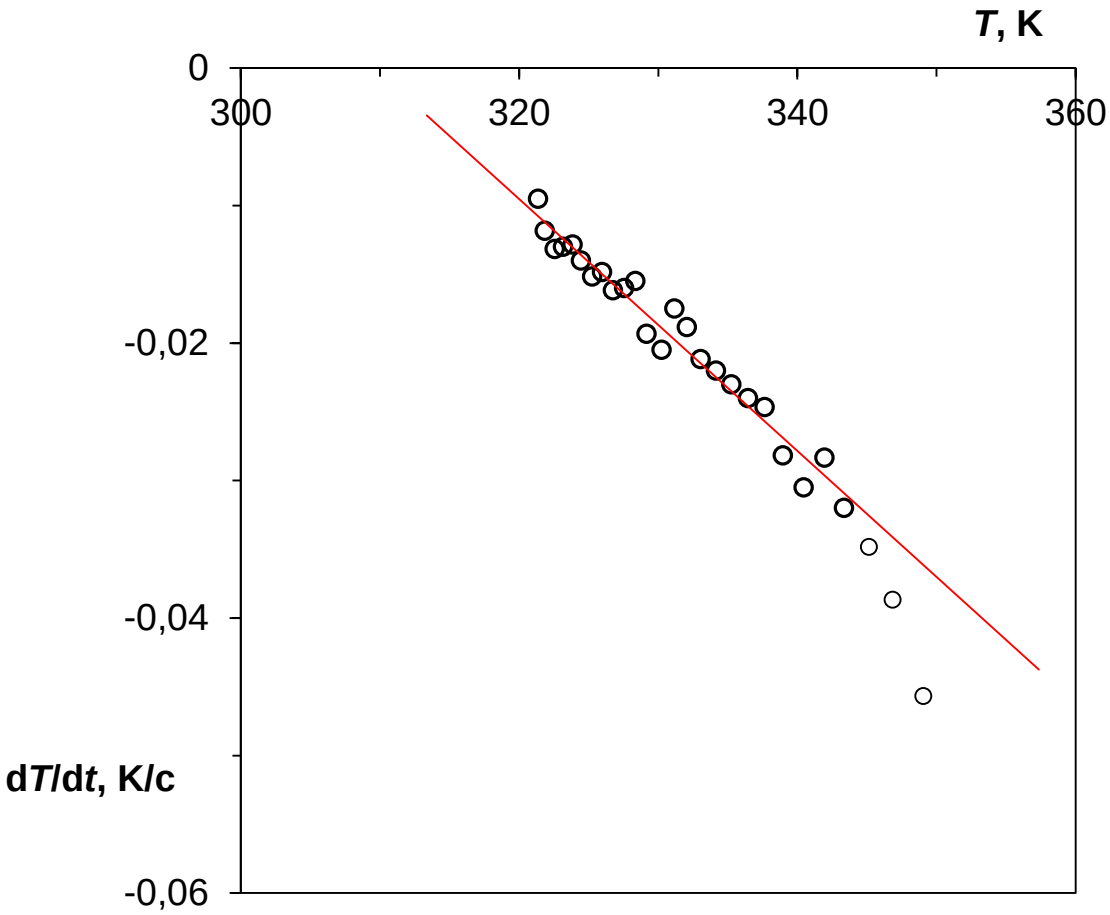


Рис. Зависимость dT/dt vs. T в ЛРМ-4. Прямая – линейный тренд.

4° Выводы. В этом разделе студенты подвели итоги ЛРМ, зафиксировав содержательный результат (подтверждение адекватности математической модели охлаждения тела путем теплообмена), решение поставленных задач и достижение цели ЛРМ.

Комментарий к ЛРМ-4: Эту работу, возможно, в наибольшей степени следует считать цифровой ЛРМ, так как для ее выполнения использовались «Цифровая лаборатория по математике» разработки ООО «Научные развлечения» .

Как и в случае с другими ЛРМ, студенты заранее получили задание самостоятельно ознакомиться с физическим механизмом теплообмена, а также с математической моделью явления: скорость $\mathrm{d}T(t)/\mathrm{d}t$ изменения температуры тела $T(t)$ со временем t прямо пропорциональна разности $T(t) - T_0$, где T_0 – температура окружающей среды.

§3. … продолжение

В процессе краткого собеседования перед началом ЛРМ вновь выяснилось, что выделяются три группы студентов, готовых к выполнению ЛРМ, соответственно, на репродуктивном (большинство), частично-исследовательском и исследовательском уровне. Наиболее подготовленные студенты предложили идею верификации математической модели явления теплообмена (исследовательский уровень). Само выполнение ЛРМ проходило в интерактивном стиле со свободным обменом идеями между парными бригадами; отметим явный дефицит у подростков школьных навыков в подготовке и осуществлении учебной лабораторной и проектно-исследовательской деятельности. Последнее лишний раз подчеркивает актуальность проведения ЛРМ на постшкольных уровнях образования.

Заключение (продолжение).

- **Заключение.** В заключение отметим, что как показало наблюдение за ходом выполнения серии ЛРМ, в частности, описанных здесь, ЛРМ, особенно сопровождаемые обширным применением цифровых инструментов, вызывают активный самоподдерживающийся интерес современных подростков. Более того, происходит «смещение» мышления обучающихся от репродуктивного уровня простого исполнения по инструкции к частично-исследовательскому и даже исследовательскому, когда обучающийся генерирует идеи улучшения существующих или постановки новых ЛРМ. Последовательно решая экспериментальные и/или теоретические задачи, возникающие при выполнении ЛРМ, подросток осознает свои дефициты в конкретных математических разделах, и восполняет их, – самостоятельно или с помощью педагога. Одновременно формируются как конкретные умения, так и деятельностная личность (само)обучающегося гражданина-исследователя. Возможно, это является наиболее значимым итогом лабораторного подхода к обучению математике.
- *The End*

Благодарности.

- Исследование выполнено при поддержке университетского гранта ФГБОУ ВО «УрГПУ» 2021 года (научный проект № 210207 «Разработка методики постановки и проведения цифровых лабораторных работ по математике для повышения уровня функциональной математической грамотности будущих учителей»).

- Автор сердечно благодарит также своих многочисленных соавторов – работников УрГПУ и студентов, внесших посильный вклад в развитие экспериментально-лабораторного подхода к обучению математике, развиваемого на кафедре высшей математики и методики обучения математике Института математики, физики, информатики и технологий ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет».

Спасибо за внимание!

Ваши вопросы, замечания, предложения …